３．論理関数の簡単化

３－１　簡単化の意義

真理値表 → 複数の論理関数が構成可能

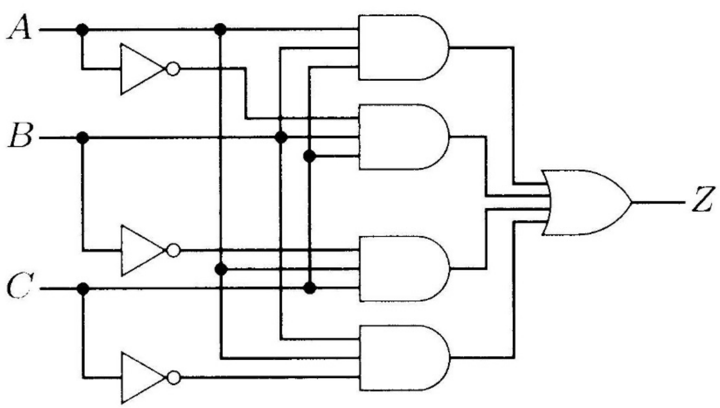
$$Z = ABC + AB\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C \qquad (3\text{-}1)$$

(3-1) ← 複雑＝素子数，結線数多い

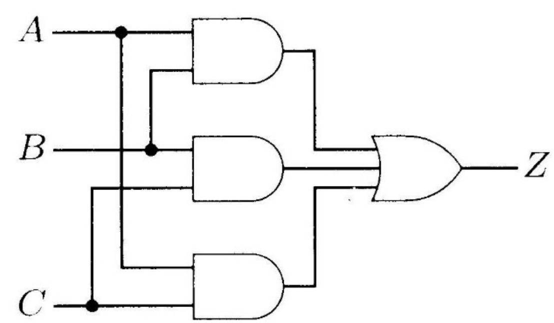
$$= AB + BC + CA \qquad (3\text{-}2)$$

(3-2) ← 簡単化＝素子数，結線数減少

安価
実装スペース倹約
信頼性向上



(3-1)で構成された論理回路



(3-2)で構成された論理回路

３－２　ブール代数による簡単化

加法標準形 → 分配則による共通項のくくり出し

加法形論理関数のブール代数による簡単化 （教p. 51 例題3. 1）

$$
\begin{aligned}
Z &= AB + \overline{A}BC + A\overline{B}C \\
&= AB\underline{\left(C + \overline{C}\right)} + \overline{A}BC + A\overline{B}C \quad \text{・・・加法標準形} \\
&= \underline{ABC} + AB\overline{C} + \underline{ABC} + \overline{A}BC + \underline{ABC} + A\overline{B}C \\
&= AB\left(C + \overline{C}\right) + BC\left(A + \overline{A}\right) + AC\left(B + \overline{B}\right) \quad \text{・・・分配則による共通項のくくり出し} \\
&= AB + BC + AC
\end{aligned}
$$

乗法形論理関数のブール代数による簡単化 （教p. 51 例題3. 2）

$$Z=(A+B)(\overline{A}+B+C)(A+\overline{B}+C)$$

$$\overline{Z}=\overline{(A+B)(\overline{A}+B+C)(A+\overline{B}+C)}$$

$$=\left(\overline{A+B}\right)+\left(\overline{\overline{A}+B+C}\right)+\left(\overline{A+\overline{B}+C}\right)$$ ・・・<u>加法形</u>

$$=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\underline{(C+\overline{C})}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$$

$$=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$$ ・・・<u>加法標準形</u>

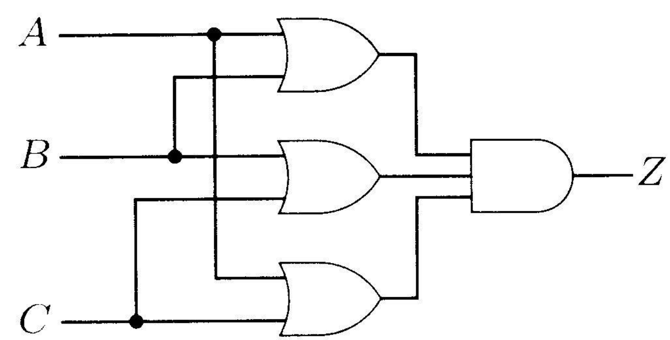
$$=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+\underline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}}+\underline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\underline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$$

$$=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot(C+\overline{C})+\overline{B}\cdot\overline{C}(A+\overline{A})+\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot(B+\overline{B})$$

$$=\overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{C}\cdot\overline{A}$$ ・・・ <u>$\overline{Z}$ の加法形</u>

$$Z=\overline{\overline{Z}}=\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{C}\cdot\overline{A}}$$

$$=(A+B)(B+C)(C+A)$$ ・・・<u>Z の乗法形</u>



３－３　カルノー図による簡単化

カルノー図：　1950年代にベル研究所のモーリス・カルノー
(Maurice Karnaugh)が考案
真理値表を2次元の平面図として表したもの
各枠は，加法標準形の最小項に対応

グレイ符号
（隣接する2つの符号が互いに1ビットだけ異なる）

$A \backslash B$	0	1
0		
1		

(a) ２変数

$AB \backslash C$	0	1
00		
01		
11		
10		

(b) ３変数

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

(c) ４変数

$E=0$

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$E=1$

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

ABC \ DE	00	01	11	10
000				
001				
011				
010				
110				
111				
101				
100				

(d) 5変数

３－３－１　カルノー図による加法形論理関数の簡単化

$$Z = A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{A}C + \overline{A}B$$

３変数論理関数の簡単化→加法形および乗法形　（教p. 53 例題3. 3）

加法形

$$Z = A\overline{B}\left(C+\overline{C}\right) + B\overline{C}\left(A+\overline{A}\right) + \overline{A}C\left(B+\overline{B}\right) + \overline{A}B\left(C+\overline{C}\right)$$

$$= A\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}C$$

・・・加法標準形

「101」の升目に「1」を記入

まとめることが可能な最小項をカルノー図を用いて見つける
囲みの組合せは自由

隣り合う1のマス目を2のべき乗個（2の倍数個）ずつまとめる
各マス目は，複数回使用可

AB \ C	0	1
00		1
01	1	1
11	1	
10	1	1

$$\overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC = \overline{A}C\left(\overline{B}+B\right) = \overline{A}C$$

$$\overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} = B\overline{C}\left(A+\overline{A}\right) = B\overline{C}$$

$$A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C = A\overline{B}\left(C+\overline{C}\right) = A\overline{B}$$

AB \ C	0	1
00		1
01	1	1
11	1	
10	1	1

$\overline{B}C$

$\overline{A}B$

$A\overline{C}$

つながっていると考える

$$\boxed{Z = A\overline{B} + B\overline{C} + C\overline{A}} \quad (3\text{-}3)$$

・・・ 簡略化された加法形の論理関数 ・・・

$$\boxed{Z = \overline{A}B + \overline{B}C + \overline{C}A} \quad (3\text{-}4)$$

課題3. 1　３変数論理関数の簡単化→加法形および乗法形

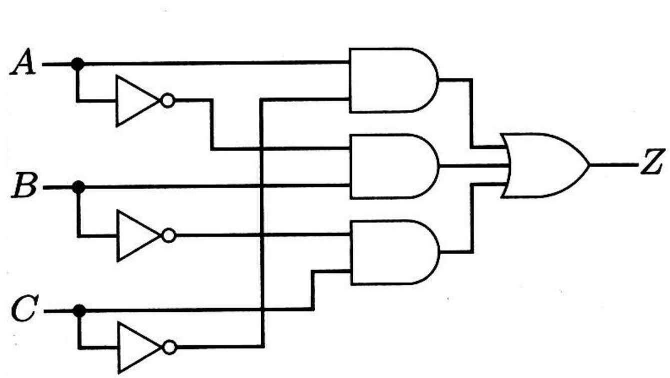
乗法形

カルノー図の空白部分に着目して $\overline{Z}$ の加法形を求め,
次にド・モルガンの定理を用いてZの乗法形に変換する。

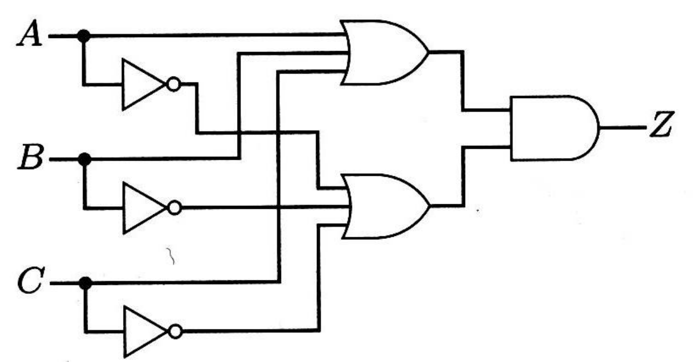
$$\overline{Z} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + ABC$$

$$Z = \overline{\overline{Z}} = \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + ABC} = \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}} \cdot \overline{ABC}$$

$$= \left(A + B + C\right)\left(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}\right) \qquad (3\text{-}5)$$



(a) 加法形(3-4)の回路構成



(b) 乗法形(3-5)の回路構成

４変数論理関数の簡単化 （教p. 55 例題3. 4）

$$Z = \underbrace{\bar{A}\bar{B}D}+\bar{A}BD+A\bar{C}D+AB\bar{D}$$

Cに無関係（Cは「0」でも「1」でもかまわない）
→「0001」および「0011」の升目に「1」を記入

AB \ CD	00	01	11	10
00		1	1	
01		1	1	
11	1	1		1
10		1		

$\bar{A}D$

$AB\bar{D}$

$\bar{C}D$

隣り合う1のマス目を2のべき乗個
（2の倍数個）ずつまとめる
各マス目は，複数回使用可

$$\boxed{Z = \bar{A}D + \bar{C}D + AB\bar{D}}$$

５変数論理関数の簡単化 （教p. 56 例題3. 5）

E=0

AB \ CD	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	
11		1	1	
10	1	1	1	1

$\overline{B}\,\overline{D}\,\overline{E}$ <u>AおよびCに無関係</u>

AD

<u>B, C, およびEに無関係</u>

BD <u>A, C, およびEに無関係</u>

E=1

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01		1	1	
11		1	1	
10		1	1	

$$\boxed{Z = AD + BD + \overline{B}\,\overline{D}\,\overline{E}}$$

	ABC \ DE	00	01	11	10
A=0	000	1			
	001	1			
	011			1	1
	010			1	1
A=1	110			1	1
	111			1	1
	101	1		1	1
	100	1		1	1

BD　A, C, およびEに無関係

AD　B, C, およびEに無関係

$\overline{B}\,\overline{D}\,\overline{E}$　AおよびCに無関係

$$\boxed{Z = AD + BD + \overline{B}\,\overline{D}\,\overline{E}}$$

３－３－２ カルノー図による乗法形論理関数の簡単化

ド・モルガンの定理を用いて乗法形（Z）を加法形（$\overline{Z}$）に変換

$\overline{Z}$ のカルノー図を求め，これを簡単化

再度ド・モルガンの定理を用いて $\overline{Z}$ を Z に変換

乗法形論理関数の簡単化 （教p. 58 例題3. 6）

$$Z=\left(A+\overline{B}\right)\left(B+\overline{C}\right)\left(\overline{B}+C\right)\left(\overline{A}+B\right)$$

$$\overline{Z}=\overline{\left(A+\overline{B}\right)\left(B+\overline{C}\right)\left(\overline{B}+C\right)\left(\overline{A}+B\right)}$$

$$=\overline{A}B+\overline{B}C+B\overline{C}+A\overline{B}$$

簡単化

$$\overline{Z}=A\overline{B}+B\overline{C}+C\overline{A}$$

$$Z=\overline{\overline{Z}}=\overline{A\overline{B}+B\overline{C}+C\overline{A}}$$

$$=\left(\overline{A}+B\right)\left(\overline{B}+C\right)\left(\overline{C}+A\right)$$

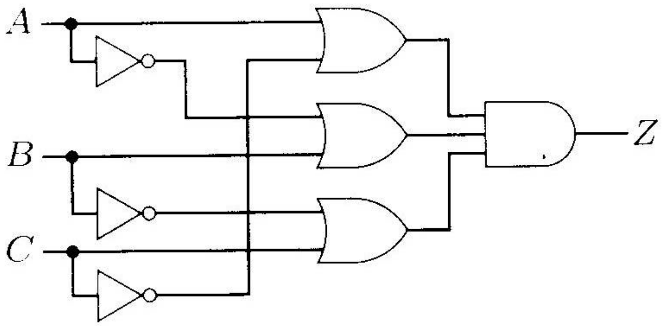
(3-6) ・・・<u>乗法形</u>

AB \ C	0	1	
00		1	$\overline{A}C$
01	1	1	
11	1		$B\overline{C}$
10	1	1	$A\overline{B}$

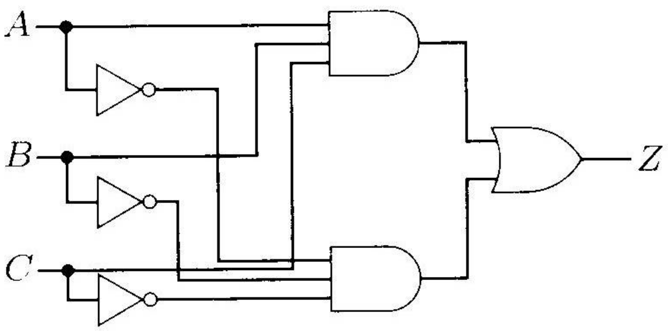
$\overline{Z} = 0$であれば, $Z = 1$

カルノー図の「0」の部分に着目し，加法形を導出

$$\boxed{Z = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + ABC}$$ (3-7) ・・・<u>加法形</u>



(a) 乗法形(4-6)の回路構成



(b) 加法形(4-7)の回路構成

課題3. 2　カルノー図による乗法形論理関数の簡単化

３－３－３ 冗長項用いたカルノー図による論理関数の簡単化

10進数	(BCD符号) $D\ C\ B\ A$	Z
0	0 0 0 0	0
1	0 0 0 1	0
2	0 0 1 0	0
3	0 0 1 1	0
4	0 1 0 0	0
5	0 1 0 1	1
6	0 1 1 0	1
7	0 1 1 1	1
8	1 0 0 0	1
9	1 0 0 1	1
10	1 0 1 0	×
11	1 0 1 1	×
12	1 1 0 0	×
13	1 1 0 1	×
14	1 1 1 0	×
15	1 1 1 1	×

10キー（0～9）

冗長項
（入力として
存在しない）
⇩
出力は「0」でも
「1」でもよい

冗長項を利用しない場合

DC \ BA	00	01	11	10
00				
01		1	1	1
11				
10	1	1		

$$Z = D\overline{C}\,\overline{B} + \overline{D}CA + \overline{D}CB$$

冗長項を利用した場合

DC \ BA	00	01	11	10
00				
01		1	1	1
11	×	×	×	×
10	1	1	×	×

$$Z = D + CA + CB$$

課題3. 3　冗長項を用いたカルノー図による４変数論理関数の簡単化

３－４　クワイン・マクラスキー法による簡単化

- クワインが提案し，マクラスキーが圧縮表の作り方に工夫をとり入れた
- 簡単化の過程が機械的であり，プログラム化が容易で多変数の論理式に向く

３－４－１　Ｑ－Ｍ法による論理関数の簡単化

Ｑ－Ｍ法による４変数論理関数の簡単化　（教p. 61 例題3. 8）

$$Z = \overline{A}BC + AB\overline{C} + ABD + B\overline{C}D + \overline{A}C\overline{D} + AC\overline{D}$$

加法標準形を求める

$$Z = \overline{A}BC\left(D+\overline{D}\right) + AB\overline{C}\left(D+\overline{D}\right) + AB\left(C+\overline{C}\right)D + \left(A+\overline{A}\right)B\overline{C}D + \overline{A}\left(B+\overline{B}\right)C\overline{D} + A\left(B+\overline{B}\right)C\overline{D}$$

$$= \overline{A}BCD + \overline{A}BC\overline{D} + AB\overline{C}D + AB\overline{C}\,\overline{D} + ABCD + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + ABC\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D}$$

0 1 1 1　0 1 1 0　1 1 0 1　1 1 0 0　1 1 1 1　0 1 0 1　0 0 1 0　1 1 1 0　1 0 1 0

各最小項を肯定変数(「1」)の個数の少ない順に並べる　・・・圧縮表

圧縮表

1の個数	最小項	3変数項	2変数項
1	✓ $\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$	✓ $\overline{A}C\overline{D}$	$C\overline{D}$
2	✓ $\overline{A}B\overline{C}D$	✓ $\overline{B}C\overline{D}$	$\cancel{C\overline{D}}$
	✓ $\overline{A}BC\overline{D}$	✓ $\overline{A}BD$	BD
	✓ $A\overline{B}C\overline{D}$	✓ $B\overline{C}D$	$\cancel{BD}$
	✓ $AB\overline{C}\,\overline{D}$	✓ $\overline{A}BC$	BC
3	✓ $\overline{A}BCD$	✓ $BC\overline{D}$	$\cancel{BC}$
	✓ $AB\overline{C}D$	✓ $AC\overline{D}$	AB
	✓ $ABC\overline{D}$	✓ $AB\overline{C}$	$\cancel{AB}$
4	✓ $ABCD$	✓ $AB\overline{D}$	
		✓ BCD	
		✓ ABD	
		✓ ABC	

1変数だけが異なるグループは隣接項であり，1変数を省略した簡単化が可能な場合がある

⇩

簡単化した項に「✓」を付けておく。簡単化できなかった(「✓」の付いていない)項は主項

⇩

新しくできたグループの隣接項について同様に簡単化を行い，簡単化ができなくなるまで繰り返す

⇩

最小項・主項表を作成する

$$Z = C\overline{D} + BD + BC + AB$$

圧縮表

1の個数	最小項	3変数項	2変数項
1	✓ $\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$	✓ $\overline{A}C\overline{D}$	$C\overline{D}$
	✓ $\overline{A}B\overline{C}D$	✓ $\overline{B}C\overline{D}$	$\cancel{C\overline{D}}$
2	✓ $\overline{A}BC\overline{D}$	✓ $\overline{A}BD$	BD
	✓ $A\overline{B}C\overline{D}$	✓ $B\overline{C}D$	$\cancel{BD}$
	✓ $AB\overline{C}\,\overline{D}$	✓ $\overline{A}BC$	BC
	✓ $\overline{A}BCD$	✓ $BC\overline{D}$	$\cancel{BC}$
3	✓ $AB\overline{C}D$	✓ $AC\overline{D}$	AB
	✓ $ABC\overline{D}$	✓ $AB\overline{C}$	$\cancel{AB}$
4	✓ $ABCD$	✓ $AB\overline{D}$	
		✓ BCD	
		✓ ABD	
		✓ ABC	

最小項・主項表

最小項	$C\overline{D}$	BD	BC	AB
$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$	✓			
$\overline{A}B\overline{C}D$		✓		
$\overline{A}BC\overline{D}$	✓		✓	
$A\overline{B}C\overline{D}$	✓			
$AB\overline{C}\,\overline{D}$				✓
$\overline{A}BCD$		✓	✓	
$AB\overline{C}D$		✓		✓
$ABC\overline{D}$	✓		✓	✓
$ABCD$		✓	✓	✓

最小項が簡単化された主項に「✓」をつける

⇩

ここですべての最小項が含まれ，かつ重複しないように主項を拾い上げる（○印）

⇩

拾い上げた主項の論理和を取ったものが，簡単化された論理関数　$Z = C\overline{D} + BD + AB$

課題3. 4　Q－M法による3変数論理関数の簡単化

３－４－２　冗長項を用いたＱ－Ｍ法による論理関数の簡単化

10進数	(BCD符号) $D\ C\ B\ A$	Z
0	0 0 0 0	0
1	0 0 0 1	0
2	0 0 1 0	0
3	0 0 1 1	0
4	0 1 0 0	0
5	0 1 0 1	1
6	0 1 1 0	1
7	0 1 1 1	1
8	1 0 0 0	1
9	1 0 0 1	1
10	1 0 1 0	×
11	1 0 1 1	×
12	1 1 0 0	×
13	1 1 0 1	×
14	1 1 1 0	×
15	1 1 1 1	×

10キー (0–9)

冗長項（入力として存在しない） (10–15)

- 冗長項も含めた最小項のグループから主項を求める
- 最後に残った主項の中から冗長項に関する主項を省き論理関数を求める

1の個数	最小項	3変数項	2変数項	1変数項
1	✓ $D\overline{C}\overline{B}\overline{A}$	✓ $D\overline{C}\overline{B}$	✓ $D\overline{C}$	D
	✓ $\overline{D}C\overline{B}A$	✓ $D\overline{C}\overline{A}$	✓ $D\overline{B}$	$\cancel{D}$
	✓ $\overline{D}CB\overline{A}$	✓ $D\overline{B}\overline{A}$	$\cancel{D\overline{B}}$	$\cancel{D}$
2	✓ $D\overline{C}\overline{B}A$	✓ $\overline{D}CA$	$\cancel{D\overline{A}}$	
	× $D\overline{C}B\overline{A}$	✓ $C\overline{B}A$	✓ $D\overline{A}$	
	× $DC\overline{B}\overline{A}$	✓ $\overline{D}CB$	CA	
3	✓ $\overline{D}CBA$	✓ $CB\overline{A}$	$\cancel{CA}$	
	× $D\overline{C}BA$	✓ $D\overline{C}A$		
	× $DC\overline{B}A$	✓ $D\overline{B}A$	CB	
	× $DCB\overline{A}$	× $D\overline{C}B$	$\cancel{CB}$	
4	× $DCBA$	× $DB\overline{A}$	✓ DA	
		× $DC\overline{B}$	$\cancel{DA}$	
		× $DC\overline{A}$	× DB	
		✓ CBA	$\cancel{\times DB}$	
		× DBA	× DC	
		× DCA	$\cancel{\times DC}$	
		× DCB		

× ：冗長項

× ：冗長項どうしの組合せによる項

最小項・主項表

最小項	D	CB	CA
$D\overline{C}\overline{B}\overline{A}$	✓		
$\overline{D}C\overline{B}A$			✓
$\overline{D}CB\overline{A}$		✓	
$D\overline{C}\overline{B}A$	✓		
$\overline{D}CBA$		✓	✓

拾い上げた主項の論理和を取ると，簡単化された論理関数 $Z = D + AC + BC$ が得られる。