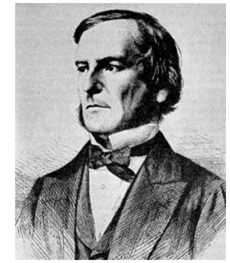
2. 論理関数

２－１ ブール代数の変数と記号



* George Boole, イギリス, 1815 – 1864

ブール代数：論理演算の基礎理論

論理変数：$A, B, C,$ ・・・（変数の取りうる値は0または1）
論理関数：$Z = f(A, B, C,$ ・・・$)$

ブール代数の用語の対応

ブール代数	英語	日本語	電気回路			
			スイッチ	電圧	論理回路	
0	False, F	偽	開，OFF	0[V]	Low	0
1	True, T	真	閉，ON	5[V]	High	1
+	or	または	並列接続		OR回路	
・	and	かつ	直列接続		AND回路	
$\overline{\square}$	not	否定	開閉が逆		NOT回路	

* ウィキペディア，「ジョージ・ブール」より引用
http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%B8%E3%83%A7%E3%83%BC%E3%82%B8%E3%83%BB%E3%83%96%E3%83%BC%E3%83%AB

２－２　ブール代数の公式

（１）ブール代数の公理

①交換則	$A+B=B+A$	$A\cdot B=B\cdot A$
②結合則	$(A+B)+C=A+(B+C)$	$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$
③分配則	$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$	$A+B\cdot C=(A+B)\cdot(A+C)$
④恒等則	$A+0=A$	$A\cdot 1=A$
⑤補元則	$A+\overline{A}=1$	$A\cdot\overline{A}=0$

（２）ブール代数の定理

⑥べき等則	$A+A=A$	$A\cdot A=A$
⑦吸収則	$A+A\cdot B=A$	$A\cdot(A+B)=A$
⑧帰無則	$A+1=1$	$A\cdot 0=0$
⑨復元則	$\overline{\overline{A}}=A$ （二重否定）	

双対性の原理：「＋」と「・」，「０」と「１」を入れ替えると双対な式が得られる

積優先の法則：論理積「・」が論理和「＋」に優先する

(3) ド・モルガンの定理

$$\overline{A+B} = \overline{A}\cdot\overline{B} \qquad \overline{A\cdot B} = \overline{A}+\overline{B}$$

$$\overline{A+B+C+\ \cdots} = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\ \cdots \qquad \overline{A\cdot B\cdot C\cdot\ \cdots} = \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\ \cdots$$

AND演算をOR演算，OR演算をAND演算に変換

(4) 定理の証明例

⑥べき等則

$$\begin{aligned} A+A &= A\cdot 1 + A\cdot 1 \\ &= A\cdot(1+1) \\ &= A\cdot 1 \\ &= A \end{aligned}$$

⑦吸収則

$$\begin{aligned} A+A\cdot B &= A\cdot 1 + A\cdot B \\ &= A\cdot(1+B) \\ &= A\cdot 1 \\ &= A \end{aligned}$$

（教p. 30 例題2.5）

⑧帰無則

$$\begin{aligned} A+1 &= (A+1)\cdot 1 \\ &= (A+1)\cdot(A+\overline{A}) \\ &= A+1\cdot\overline{A} \\ &= A+\overline{A} \\ &= 1 \end{aligned}$$

（5）ブール代数による式の簡単化

$$
\begin{aligned}
&A + \overline{A} \cdot B \\
&= \left(A + \overline{A}\right) \cdot \left(A + B\right) \\
&= 1 \cdot \left(A + B\right) \\
&= A + B
\end{aligned}
$$

（教p. 31 例題2. 6（4））

$$
\begin{aligned}
&\left(A + B\right) \cdot \left(A + \overline{B}\right) \\
&= A \cdot A + A \cdot \overline{B} + A \cdot B + B \cdot \overline{B} \\
&= A + A \cdot \left(B + \overline{B}\right) \\
&= A + A \\
&= A
\end{aligned}
$$

（教p. 49 演習問題2. 4(2) ）

$$
\begin{aligned}
&A \cdot B + A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot \overline{B} \\
&= A \cdot \left(B + \overline{B}\right) + \overline{A} \cdot \overline{B} \\
&= A + \overline{A} \cdot \overline{B} \\
&= \left(A + \overline{A}\right) \cdot \left(A + \overline{B}\right) \\
&= A + \overline{B}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(AB + \overline{A}B\right) \cdot C \\
&= \left(A + \overline{A}\right) \cdot B \cdot C \\
&= B \cdot C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overline{A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B} \\
&= \overline{A \cdot \overline{B}} \cdot \overline{\overline{A} \cdot B} \\
&= \left(\overline{A} + \overline{\overline{B}}\right) \cdot \left(\overline{\overline{A}} + \overline{B}\right) \\
&= \left(\overline{A} + B\right) \cdot \left(A + \overline{B}\right) \\
&= A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}
\end{aligned}
$$

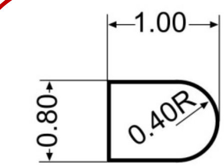
課題2. 1　ブール代数による式の簡単化と双対性

２－３　論理記号と基本論理演算

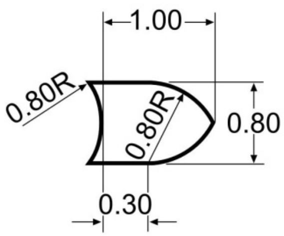
２－３－１　論理記号（MIL規格表示）

論理回路：論理関数で表わされる物理現象の入出力関係をディジタルICを使用して実現する

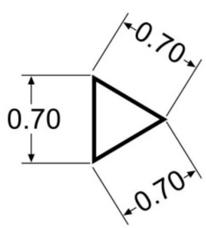
MIL(Military standard)規格（アメリカ国防総省制定の物資の調達規格）表示を用いて論理回路を表すのが一般的



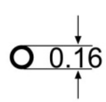
AND記号：すべての入力がHの場合，出力にHが出力される



OR記号：ひとつでも入力がHの場合，出力にHが出力される



増幅器

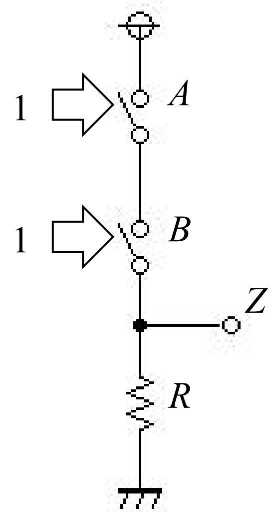


＊ 状態表示記号

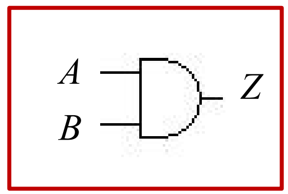
＊ ウィキペディア，「MIL論理記号」より引用
http://ja.wikipedia.org/wiki/MIL%E8%AB%96%E7%90%86%E8%A8%98%E5%8F%B7

２－３－２　基本論理演算

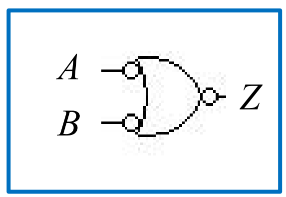
（1）論理積（AND）回路



(a) 等価回路



正論理AND



負論理OR

(b) MIL記号

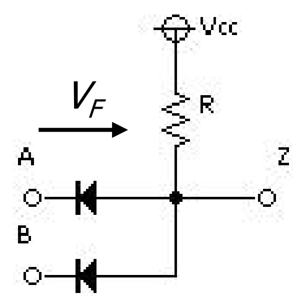
(c) AND論理の真理値表

A	B	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$Z = \boxed{A \cdot B}$$

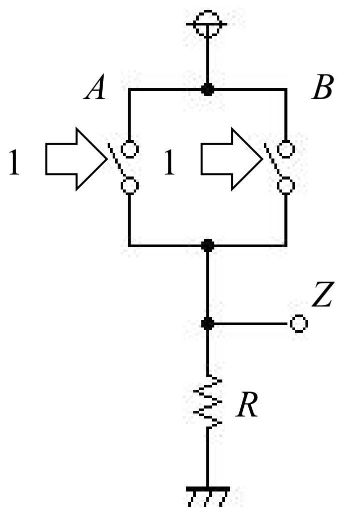
$$= \overline{\overline{A \cdot B}}$$

$$= \boxed{\overline{\overline{A} + \overline{B}}}$$

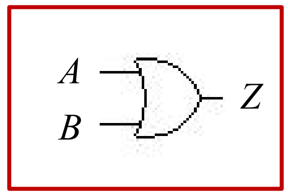


(d) ダイオードを用いたAND回路（ダイオードロジック構成）

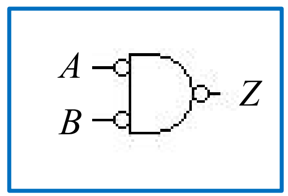
（2）論理和（OR）回路



(a) 等価回路



正論理OR



負論理AND

(b) MIL記号

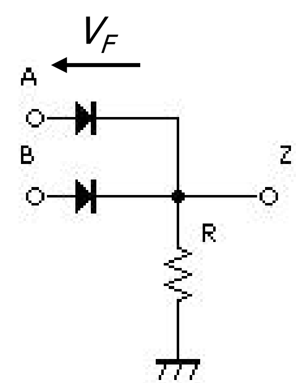
(c) OR論理の真理値表

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$Z = \boxed{A + B}$$

$$= \overline{\overline{A + B}}$$

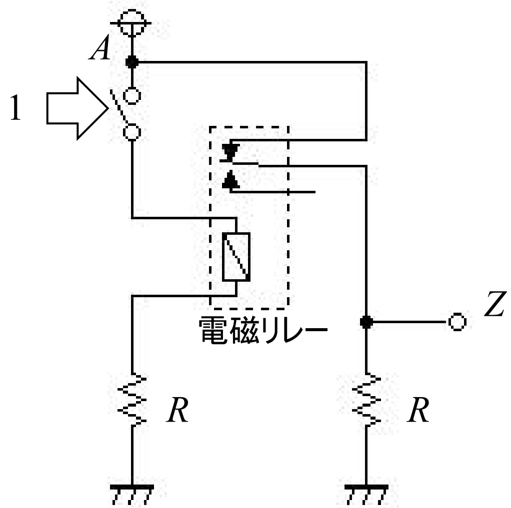
$$= \boxed{\overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}}$$



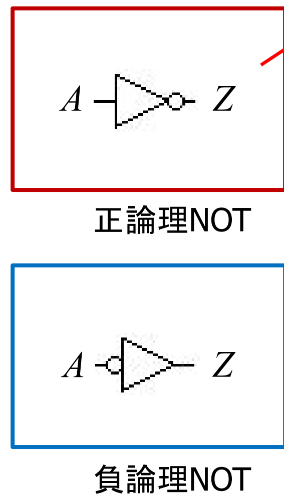
(d) ダイオードを用いたOR回路（ダイオードロジック構成）

（3）論理否定（NOT）回路

$$Z = \overline{A}$$



(a) 等価回路



正論理の信号を負論理に変換する場合のNOT回路の回路記号

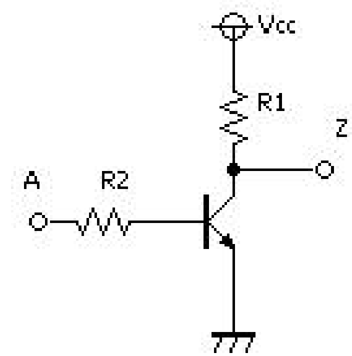
負論理の信号を正論理に変換する場合のNOT回路の回路記号

(b) MIL記号

A	Z
0	1
1	0

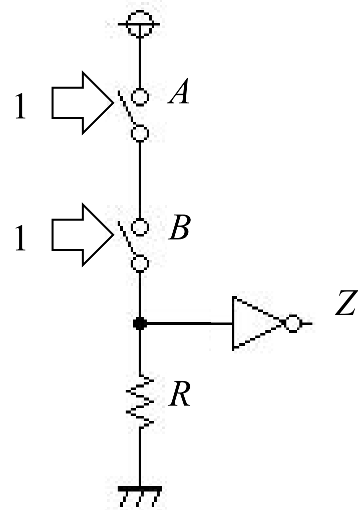
$$Z = \overline{A}$$

(c) NOT論理の真理値表

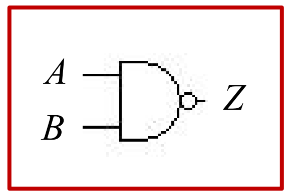


(d) トランジスタを用いたNOT回路（トランジスタロジック構成）

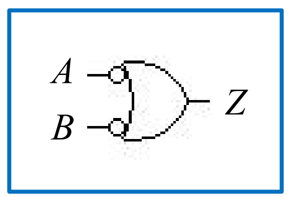
(4)否定論理積(NAND)回路



(a) 等価回路



正論理



負論理

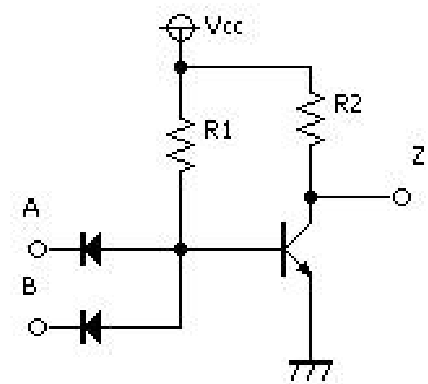
(b) MIL記号

(c) NAND論理の真理値表

A	B	Z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

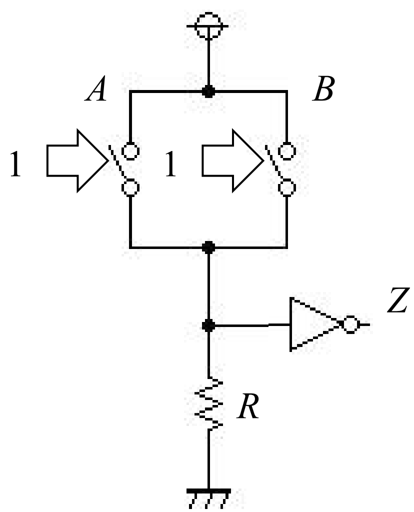
$$Z = \boxed{\overline{A \cdot B}}$$

$$= \boxed{\overline{A} + \overline{B}}$$

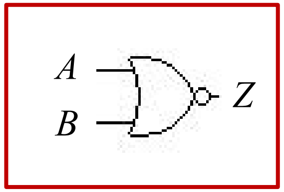


(d) ダイオードとトランジスタを用いたNAND回路(DTLロジック構成)

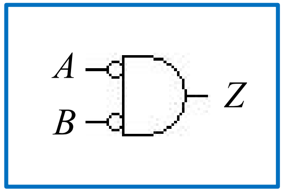
(5)否定論理和(NOR)回路



(a) 等価回路



正論理



負論理

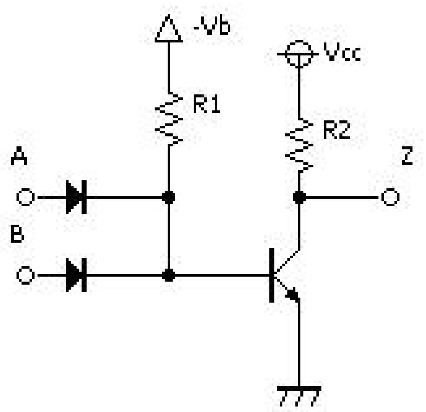
(b) MIL記号

(c) NOR論理の真理値表

A	B	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$Z = \boxed{\overline{A+B}}$$

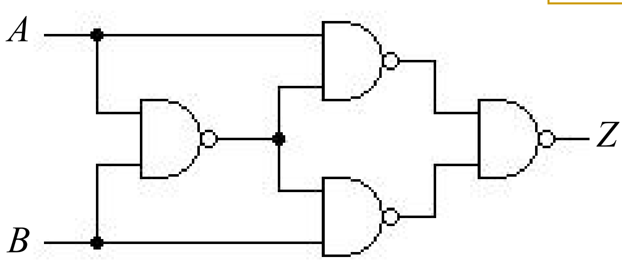
$$= \boxed{\overline{A}\cdot\overline{B}}$$



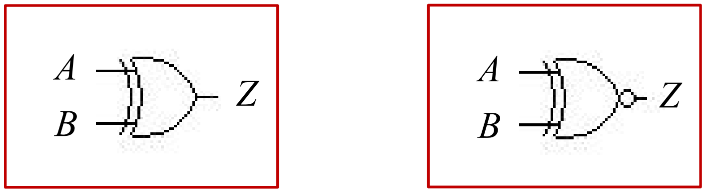
(d) ダイオードとトランジスタを用いたNOR回路(DTLロジック構成)

（6）排他的論理和（XOR (Exclusive OR)）回路
／否定排他的論理和（XNOR(Exclusive NOR)）回路

*exclusive:排他的な（自分たち以外の他のものを、しりぞけること）



(a) XORの等価回路（NAND構成）



(b) MIL記号

(c) XOR論理の真理値表

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

不一致回路

$$Z = A \oplus B = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$$
$$= (A + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$$

(d) XNOR論理の真理値表

A	B	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

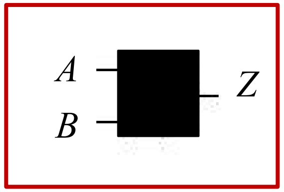
一致回路

$$Z = \overline{A \oplus B} = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$
$$= (A + \overline{B}) \cdot (\overline{A} + B)$$

２－４　正論理と負論理

２－４－１　基本論理演算と正論理・負論理

A	B	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

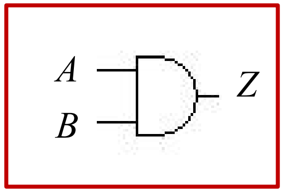


AND回路

正論理（positive logic）：
論理「０」が電圧の低い（Lowの）状態（L）
論理「１」が電圧の高い（Highの）状態（H） ⇒ <u>電圧の高い状態を「真」と考える</u>

＊<u>特にことわりがなければ、通常は正論理</u>

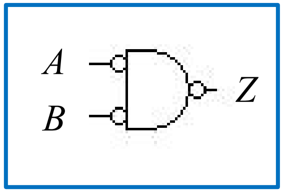
A	B	Z
L	L	L
L	H	L
H	L	L
H	H	H



正論理のAND回路

負論理（ negative logic ）：
論理「０」が電圧の高い（Highの）状態（H） ⇒ <u>電圧の低い状態を「真」と考える</u>
論理「１」が電圧の低い（Lowの）状態（L）

A	B	Z
H	H	H
H	L	H
L	H	H
L	L	L



負論理のAND回路

（1）AND回路

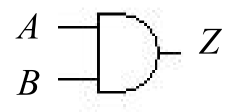
AND回路の
真理値表

A	*B*	*Z*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

「0」→「L」
「1」→「H」
に対応させる

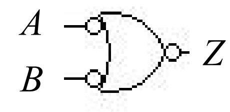
正論理AND

A	*B*	*Z*
L	L	L
L	H	L
H	L	L
H	H	H



正論理AND

＝



負論理OR

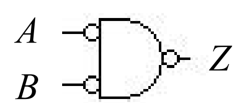
正論理で考えると、AND回路は、すべての入力がHのときHを出力

入力の論理を再度反転

負論理AND

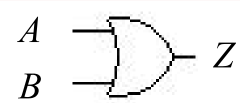
「0」→「H」
「1」→「L」
に対応させる

$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{Z}$
H	H	H
H	L	H
L	H	H
L	L	L



負論理AND

＝



正論理OR

負論理で考えると、AND回路は、いずれかの入力がHのときHを出力

正論理のOR回路に相当

（2）OR回路

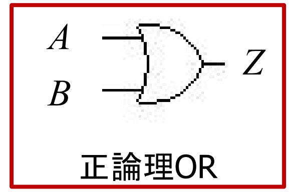
OR回路の
真理値表

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

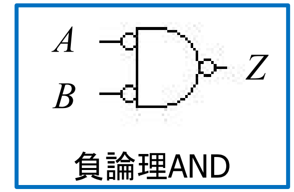
「0」→「L」
「1」→「H」
に対応させる

正論理OR

A	B	Z
L	L	L
L	H	H
H	L	H
H	H	H



＝



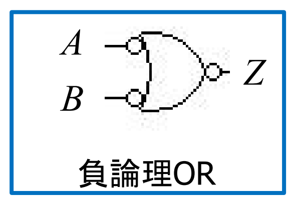
正論理で考えると、OR回路は、いずれかの入力がHのときHを出力

入出力の論理を再度反転

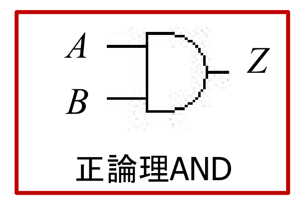
負論理OR

「0」→「H」
「1」→「L」
に対応させる

$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{Z}$
H	H	H
H	L	L
L	H	L
L	L	L



＝



負論理で考えると、OR回路は、すべての入力がHのときHを出力

正論理のAND回路に相当

（3）NAND回路

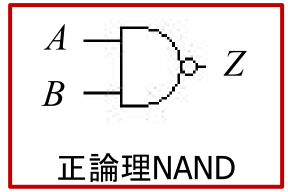
NAND回路
の真理値表

A	B	Z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

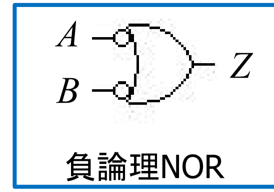
「0」→「L」
「1」→「H」
に対応させる

正論理NAND

A	B	Z
L	L	H
L	H	H
H	L	H
H	H	L



=



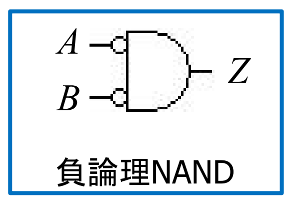
正論理で考えると、NAND回路は、すべての入力がHのときLを出力

入出力の論理を再度反転

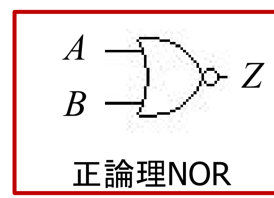
負論理NAND

$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{Z}$
H	H	L
H	L	L
L	H	L
L	L	H

「0」→「H」
「1」→「L」
に対応させる



=



負論理で考えると、NAND回路は、いずれかの入力がHのときLを出力

正論理のNOR回路に相当

（4）NOR回路

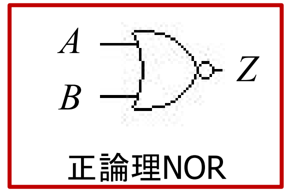
NOR回路の
真理値表

A	B	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

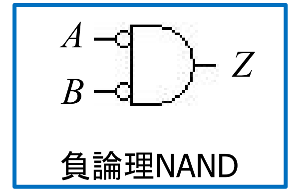
「0」→「L」
「1」→「H」
に対応させる

正論理NOR

A	B	Z
L	L	H
L	H	L
H	L	L
H	H	L



＝



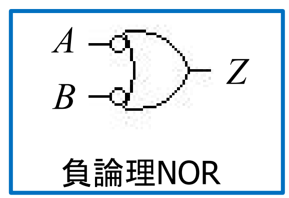
正論理で考えると、NOR回路は、いずれかの入力がHのときLを出力

入出力の論理を再度反転

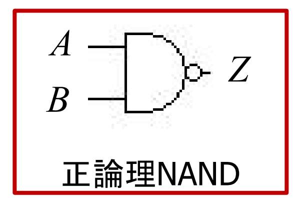
負論理NOR

「0」→「H」
「1」→「L」
に対応させる

$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{Z}$
H	H	L
H	L	H
L	H	H
L	L	H



＝



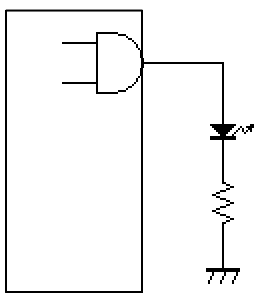
負論理で考えると、NOR回路は、すべての入力がHのときLを出力

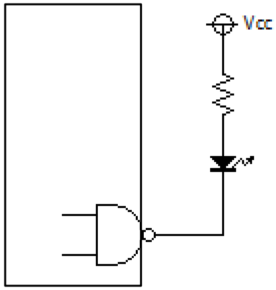
正論理のNAND回路に相当

２－４－２　ハードウェアの機能と正論理・負論理

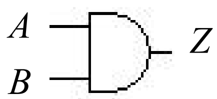
アクティブハイ（active high）：
電圧の状態が「H」，すなわち正論理で「１」を入力したときにハードウェアの機能が有効になるように設計された論理

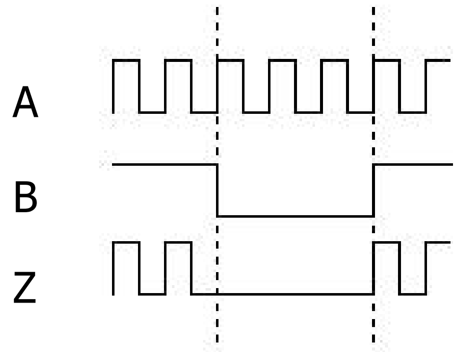
アクティブロー（active low）：
電圧の状態が「L」，すなわち負論理で「１」を入力したときにハードウェアの機能が有効になるように設計された論理





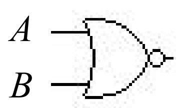
（1） ANDゲートによる信号制御

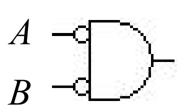


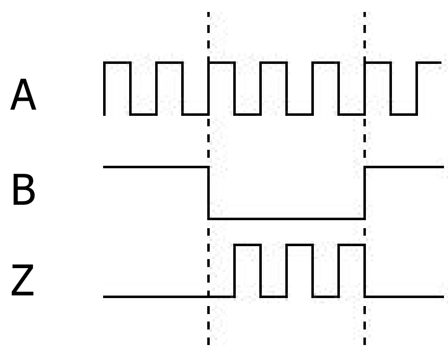


Bが「L」の期間は信号Aが遮断される
Bが「H」の期間は信号Aがそのまま出力される

（2） NORゲートによる信号制御







正論理

Bが「L」の期間は信号Aが反転して出力される
Bが「H」の期間は信号Aが遮断される

負論理

Bが「H」の期間は信号Aが遮断される
Bが「L」の期間は信号Aが反転して出力される

２－５　基本論理演算回路（ゲートIC）の実際

（１）構造による分類

- ➢バイポーラトランジスタによる構成　→　TTL (Transistor-Transistor Logic)
- ➢ユニポーラトランジスタによる構成　→　CMOS (Complementary-Metal Oxide Semiconductor)

	TTL	CMOS
電源電圧	5 V ± 5 %	2 V ~ 18 V
消費電流	大きい	小さい
動作速度	高速	TTLよりは低速～ほぼ同等

（２）型番による分類

74シリーズ標準ロジックIC △△74□□○○○

製造会社記号
・テキサス「SN」
・日立「HD」
・東芝「TC」

品種記号
TTL: 「LS」, 「F」, 「S」, ・・・ （電源電圧：5V ± 5 %）
CMOS: 「HC」「AC」「ACT」, ・・・ （電源電圧：2V ~ 6 V）

機能番号
「00」, 「02」, 「04」, ・・・

4000シリーズ標準ロジックIC △△40○○ （電源電圧：3V ~ 18 V）

製造会社記号
・ローム「BU」
・オンセミコンダクター「MC1」
・東芝「TC」

機能番号
「01」, 「11」, 「69」, ・・・

4500シリーズ標準ロジックIC △△45○○ （電源電圧：3V ~ 18 V）

（3）品種記号による分類

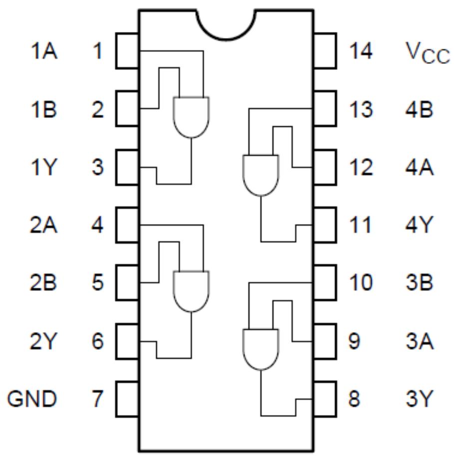
構造	品種記号	特徴
TTL	記号なし	一番最初に作られたシリーズ。最近ではほとんど使われない。
	LS	(Lowpower Schottoky) 無印と動作速度が変わらず、省電力
	ALS	(Advanced Lowpower Schottoky) LSよりさらに高速で省電力。
	F	(Fast) ALSよりさらに高速だが、消費電力はLSより多い。出力電流を多く流せる。
	AS	(Advanced Schottoky) 現在74シリーズの中で一番高速。消費電力はFより多い。
CMOS	HC	(Highspeed C-MOS) TTLの74シリーズを機能はそのままでC-MOS化
	AC	(Advanced C-MOS) HCの高速バージョン。74Fシリーズに取って代わり普及

（4）機能と機能番号の対応

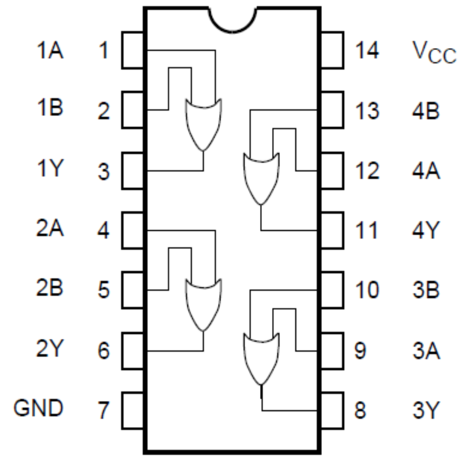
ゲート	型番
AND	08, 11 (3入力), 21 (4入力)
OR	32
NOT	04, 14 (シュミットトリガ)

ゲート	型番
NAND	00, 10 (3入力), 20 (4入力)
NOR	02, 25 (4入力), 27 (3入力)
XOR	86, 136 (O.C.)
XNOR	266 (O.C.)

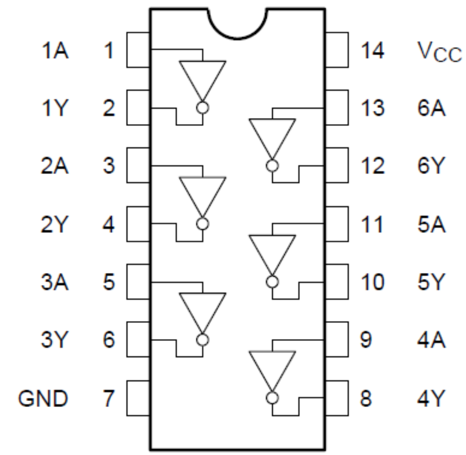
（5）論理ゲートの実際



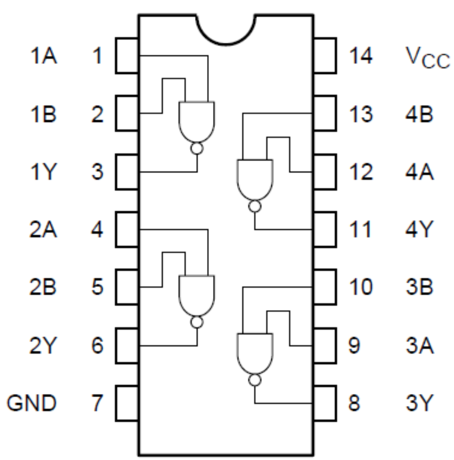
AND (08)



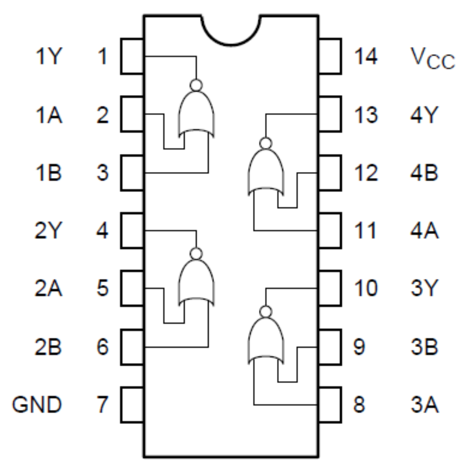
OR (32)



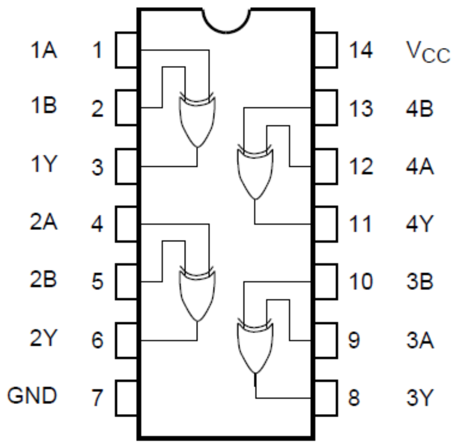
NOT (04)



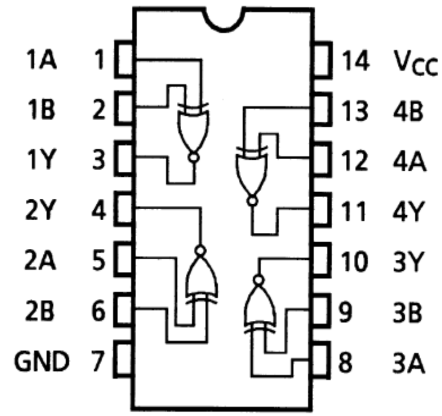
NAND (00)



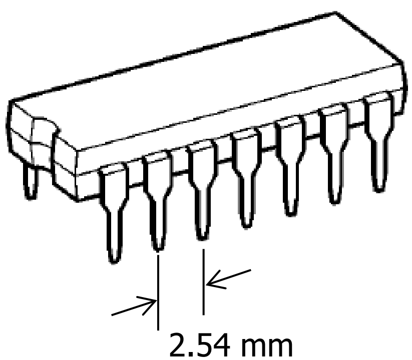
NOR (02)



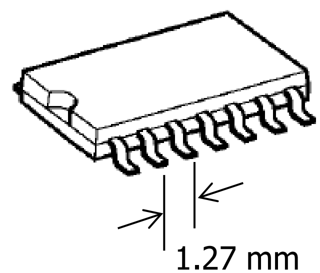
XOR (86)



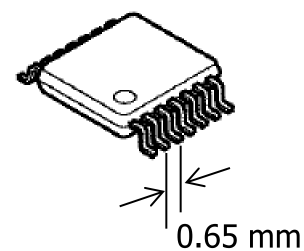
XNOR (7266)



Dual Inline Package (DIP)型



Small Outline Package (SOP)型



Shrink Small Outline Package (SSOP)型

２－６　論理関数の標準形と真理値表

（１）加法形と乗法形

加法形

$$Z_1 = \underbrace{A \cdot B} + \underbrace{B \cdot C} + \underbrace{C \cdot A}$$

AND項

AND項のOR接続

AND項のどれか一つが「１」であれば、論理関数は「１」

乗法形

$$Z_2 = \underbrace{(A + B)} \cdot \underbrace{(B + C)} \cdot \underbrace{(C + A)}$$

OR項

OR項のAND接続

OR項のどれか一つが「０」であれば、論理関数は「０」

「加法形」または「乗法形」の論理関数において，各項がすべての論理変数を含んでいる時，これらを
「加法標準形」または「乗法標準形」
と呼ぶ

加法形 → 加法標準形への変形 （教p. 39 例題2. 9）

$$Z_1 = A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A$$

論理変数は A, B, C

$$= A \cdot B \cdot 1 + B \cdot C \cdot 1 + C \cdot A \cdot 1$$

$$= A \cdot B \cdot \left(C + \overline{C}\right) + B \cdot C \cdot \left(A + \overline{A}\right) + C \cdot A \cdot \left(B + \overline{B}\right)$$

$$= A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C$$

$$= \underbrace{A \cdot B \cdot C} + \underbrace{A \cdot B \cdot \overline{C}} + \underbrace{\overline{A} \cdot B \cdot C} + \underbrace{A \cdot \overline{B} \cdot C}$$

最小項：使用するすべての論理変数を含む論理積からなる項

乗法形 → 乗法標準形への変形 （教p. 39 例題2. 10）

$$Z_2=(A+B)\cdot(B+C)\cdot(C+A)$$

論理変数は A, B, C

$$\overline{Z_2}=\overline{(A+B)\cdot(B+C)\cdot(C+A)}$$

ド･モルガンの定理を適用するため，
論理関数の否定関数を作る

$$=\overline{(A+B)}+\overline{(B+C)}+\overline{(C+A)}$$

$$=\overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{C}\cdot\overline{A}$$

$$=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot 1+\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot 1+\overline{C}\cdot\overline{A}\cdot 1$$

$$=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot(C+\overline{C})+\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot(A+\overline{A})+\overline{C}\cdot\overline{A}\cdot(B+\overline{B})$$

$$=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$$

$$=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$$

$$Z_2=\overline{\overline{Z_2}}=\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}}$$

再度、否定関数を作り、元に戻す

$$=\left(\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}}\right)\cdot\left(\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C}\right)\cdot\left(\overline{A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}}\right)\cdot\left(\overline{\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}}\right)$$

$$=\underbrace{(A+B+C)}\cdot\underbrace{(A+B+\overline{C})}\cdot\underbrace{(\overline{A}+B+C)}\cdot\underbrace{(A+\overline{B}+C)}$$

最大項：使用するすべての論理変数を含む論理和からなる項

課題2. 4　加法標準形と乗法標準形

（2）標準形と真理値表

真理値表における入力状態の組合せは，すべての最小項あるいは最大項と1対1で対応

真理値表から標準形が得られる

XORの真理値表

入力		出力	最小項	最大項
A	B	Z	$0 \to \overline{X}$, $1 \to X$	$0 \to X$, $1 \to \overline{X}$
0	0	0	$\overline{A} \cdot \overline{B}$	$A + B$
0	1	1	$\overline{A} \cdot B$	$A + \overline{B}$
1	0	1	$A \cdot \overline{B}$	$\overline{A} + B$
1	1	0	$A \cdot B$	$\overline{A} + \overline{B}$

加法標準形：真理値表のZ＝1に対応する最小項をOR接続

$$Z = A \oplus B = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$$

乗法標準形：真理値表のZ＝0に対応する最大項をAND接続

$$Z = A \oplus B = \left(A + B\right) \cdot \left(\overline{A} + \overline{B}\right)$$

最大項：値が「0」になるように組み合わせる

最小項：値が「1」になるように組み合わせる

標準形と真理値表　（教p. 40～41）

入力			出力	最小項	最大項
A	B	C	Z	$0 \to \overline{X}$ $1 \to X$	$0 \to X$ $1 \to \overline{X}$
0	0	0	0	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$	$\boxed{A + B + C}$
0	0	1	1	$\boxed{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C}$	$A + B + \overline{C}$
0	1	0	1	$\boxed{\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}}$	$A + \overline{B} + C$
0	1	1	0	$\overline{A} \cdot B \cdot C$	$\boxed{A + \overline{B} + \overline{C}}$
1	0	0	0	$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$	$\boxed{\overline{A} + B + C}$
1	0	1	1	$\boxed{A \cdot \overline{B} \cdot C}$	$\overline{A} + B + \overline{C}$
1	1	0	1	$\boxed{A \cdot B \cdot \overline{C}}$	$\overline{A} + \overline{B} + C$
1	1	1	0	$A \cdot B \cdot C$	$\boxed{\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}}$

XNORの真理値表

入力		出力	最小項	最大項
A	B	Z	$0 \to \overline{X}$ $1 \to X$	$0 \to X$ $1 \to \overline{X}$
0	0	1	(1)	$A + B$
0	1	0	$\overline{A} \cdot B$	(3)
1	0	0	(2)	$\overline{A} + B$
1	1	1	$A \cdot B$	(4)

加法標準形: $Z = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C}$

乗法標準形: $Z = \left(A + B + C\right) \cdot \left(A + \overline{B} + \overline{C}\right) \cdot \left(\overline{A} + B + C\right) \cdot \left(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}\right)$

真理値表から加法標準形および乗法標準形(教p. 41 例題2. 11)

課題2. 5　XNORの標準形

加法形 → 加法標準形 → 真理値表 → 乗法標準形
→ 乗法形

$$Z = \boxed{A \cdot B + B \cdot C}$$ ・・・<u>加法形</u>

$$= A \cdot B \cdot \left(C + \overline{C}\right) + B \cdot C \cdot \left(A + \overline{A}\right)$$

$$= A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C$$

$$= \boxed{A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C}$$ ・・・<u>加法標準形</u>

入力			出力	最小項	最大項
A	B	C	Z	$0 \to \overline{X}$ $1 \to X$	$0 \to X$ $1 \to \overline{X}$
0	0	0	0	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$	$A + B + C$
0	0	1	0	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$	$A + B + \overline{C}$
0	1	0	0	$\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$	$A + \overline{B} + C$
0	1	1	1	$\overline{A} \cdot B \cdot C$	$A + \overline{B} + \overline{C}$
1	0	0	0	$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$	$\overline{A} + B + C$
1	0	1	0	$A \cdot \overline{B} \cdot C$	$\overline{A} + B + \overline{C}$
1	1	0	1	$A \cdot B \cdot \overline{C}$	$\overline{A} + \overline{B} + C$
1	1	1	1	$A \cdot B \cdot C$	$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

$Z = 0$ に着目

$$\overline{Z} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C$$

$$= \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \left(\overline{C} + C\right) + \overline{A} \cdot \overline{C}\left(B + \overline{B}\right) + A \cdot \overline{B} \cdot \left(C + \overline{C}\right)$$

$$= \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B}$$

$$= \overline{B} \cdot \left(A + \overline{A}\right) + \overline{A} \cdot \overline{C} = \overline{B} + \overline{A} \cdot \overline{C}$$

・・・<u>$\overline{Z}$ の加法形</u>

$$Z = \overline{\overline{Z}} = \overline{\overline{B} + \overline{A} \cdot \overline{C}}$$

$$= \overline{\overline{B}} \cdot \overline{\overline{A} \cdot \overline{C}} = B \cdot \left(A + C\right)$$ ・・・<u>乗法形</u>

・・・簡単化困難

$Z = 0$ に着目し、最大項のAND接続

$$Z = \left(A + B + C\right) \cdot \left(A + B + \overline{C}\right) \cdot \left(A + \overline{B} + C\right) \cdot \left(\overline{A} + B + C\right) \cdot \left(\overline{A} + B + \overline{C}\right)$$

・・・<u>乗法標準形</u>

加法形から乗法標準形と乗法形（教p. 41 例題2. 12）

乗法形 →（否定，ド・モルガンの定理）→ 否定形の加法形 →

→①否定形の加法標準形 →（否定）→ ②乗法標準形

→ 真理値表 → ③加法標準形 → ④加法形

簡単化

$$Z=\left(\overline{B}+C\right)\cdot\left(\overline{A}+B+\overline{C}\right)$$

$$\overline{Z}=\overline{\left(\overline{B}+C\right)\cdot\left(\overline{A}+B+\overline{C}\right)}=\overline{\left(\overline{B}+C\right)}+\overline{\left(\overline{A}+B+\overline{C}\right)}=B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot C$$

$$=B\cdot\overline{C}\cdot\left(A+\overline{A}\right)+A\cdot\overline{B}\cdot C=A\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot C$$ ・・・①否定形の加法標準形

$$Z=\overline{\overline{Z}}=\overline{A\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot C}=\left(\overline{A\cdot B\cdot\overline{C}}\right)\cdot\left(\overline{\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}}\right)\cdot\left(\overline{A\cdot\overline{B}\cdot C}\right)$$

$$=\boxed{\left(\overline{A}+\overline{B}+C\right)\cdot\left(A+\overline{B}+C\right)\cdot\left(\overline{A}+B+\overline{C}\right)}$$ ・・・②乗法標準形

A	B	C	$\overline{Z}$	Z
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

①より

$$Z=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot C$$

$$+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+A\cdot B\cdot C$$ ・・・③加法標準形

$$=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\left(\overline{C}+C\right)+B\cdot C\cdot\left(\overline{A}+A\right)+\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\left(\overline{A}+A\right)$$

$$=\overline{A}\cdot\overline{B}+B\cdot C+\overline{B}\cdot\overline{C}$$ ・・・④加法形

乗法形から加法標準形と加法形（教p. 42 例題2. 13）

課題2. 6　加法形 → 乗法形

$$Z = A \cdot B + \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot C$$

A	B	C	Z
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

課題2. 7　乗法形 → 加法形

$$Z = \left(\overline{A} + B\right)\left(A + \overline{C}\right)$$

A	B	C	$\overline{Z}$	Z
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

（3）論理関数の展開定理

N変数の論理関数

$$f\left(A,B,C,\cdots,N\right)$$

において論理変数A に着目し, 恒等則および補元則，分配則を適用すると，加法標準形は

$$\begin{aligned} f\left(A,B,C,\cdots,N\right) &= \left(A+\overline{A}\right)\cdot f\left(A,B,C,\cdots,N\right) \\ &= A\cdot f\left(A,B,C,\cdots,N\right)+\overline{A}\cdot f\left(A,B,C,\cdots,N\right) \end{aligned}$$

初期論理関数が1となるためには，右辺第１項または第２項が1となればよい。
第１項が1となるためには$A=1$，また第２項が1となるためには，$\overline{A}=1(A=0)$ である必要がある。
したがって，

$$f\left(A,B,C,\cdots,N\right)=A\cdot f\left(1,B,C,\cdots,N\right)+\overline{A}\cdot f\left(0,B,C,\cdots,N\right)$$

のようにに展開できる（シャノン展開）。同様に，変数Bについて展開すると，

$$\begin{aligned} f\left(A,B,C,\cdots,N\right) &= A\cdot f\left(1,B,C,\cdots,N\right)+\overline{A}\cdot f\left(0,B,C,\cdots,N\right) \\ &= A\cdot B\cdot f\left(1,1,C,\cdots,N\right)+A\cdot\overline{B}\cdot f\left(1,0,C,\cdots,N\right) \\ &\quad +\overline{A}\cdot B\cdot f\left(0,1,C,\cdots,N\right)+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot f\left(0,0,C,\cdots,N\right) \end{aligned}$$

さらに，すべての変数について展開すると，

$$
\boxed{
\begin{aligned}
f(A,B,C,\cdots,N) &= A\cdot B\cdots\cdots N\cdot f(1,1,1,\cdots,1)\\
&\ \ \vdots\\
&+ A\cdot\overline{B}\cdots\cdots\overline{N}\cdot f(1,0,0,\cdots,0)\\
&+ \overline{A}\cdot\overline{B}\cdots\cdots\overline{N}\cdot f(0,0,0,\cdots,0)
\end{aligned}
}
$$

・・・<u>加法標準形</u>

が得られる。簡単な2変数の場合には，

$$
\begin{aligned}
f(A,B) &= A\cdot B\cdot f(1,1) + A\cdot\overline{B}\cdot f(1,0)\\
&+ \overline{A}\cdot B\cdot f(0,1) + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot \underline{f(0,0)}
\end{aligned}
$$

A=0, B=0 のときの関数値

N変数の論理関数

$$f\left(A,B,C,\cdots,N\right)$$

において論理変数A に着目し，恒等則および補元則，分配則を適用すると，乗法標準形は

$$\begin{aligned} f\left(A,B,C,\cdots,N\right) &= f\left(A,B,C,\cdots,N\right)+A\cdot\overline{A} \\ &= \left\{f\left(A,B,C,\cdots,N\right)+A\right\}\cdot\left\{f\left(A,B,C,\cdots,N\right)+\overline{A}\right\} \end{aligned}$$

初期論理関数が0となるためには，右辺第１項または第２項が0となればよい。
第１項が0となるためには,$A=0$ また第２項が0となるためには，$\overline{A}=0\,(A=1)$ である必要がある。
したがって，

$$f\left(A,B,C,\cdots,N\right)=\left\{f\left(0,B,C,\cdots,N\right)+A\right\}\cdot\left\{f\left(1,B,C,\cdots,N\right)+\overline{A}\right\}$$

のように展開できる。同様に，変数Bについて展開すると，

$$\begin{aligned} f\left(A,B,C,\cdots,N\right) &= \left\{f\left(0,B,C,\cdots,N\right)+A\right\}\cdot\left\{f\left(1,B,C,\cdots,N\right)+\overline{A}\right\} \\ &= \left(A+\left[\left\{f\left(0,0,C,\cdots,N\right)+B\right\}\right]\cdot\left[f\left(0,1,C,\cdots,N\right)+\overline{B}\right]\right) \\ &\quad \cdot\left(\overline{A}+\left[\left\{f\left(1,0,C,\cdots,N\right)+B\right\}\right]\cdot\left[f\left(1,1,C,\cdots,N\right)+\overline{B}\right]\right) \\ &= \left\{A+B+f\left(0,0,C,\cdots,N\right)\right\}\cdot\left\{A+\overline{B}+f\left(0,1,C,\cdots,N\right)\right\} \\ &\quad \cdot\left\{\overline{A}+B+f\left(1,0,C,\cdots,N\right)\right\}\cdot\left\{\overline{A}+\overline{B}+f\left(1,1,C,\cdots,N\right)\right\} \end{aligned}$$

分配則

さらに，すべての変数について展開すると，

$$f(A,B,C,\cdots,N)=\{A+B+\cdots+N+f(0,0,0,\cdots,0)\}$$
$$\vdots$$
$$\cdot\{A+\overline{B}+\cdots+\overline{N}+f(0,1,1,\cdots,1)\}$$
$$\cdot\{\overline{A}+\overline{B}+\cdots+\overline{N}+f(1,1,1,\cdots,1)\}$$

・・・乗法標準形

が得られる。簡単な2変数の場合には，

A=1, B=1 のときの関数値

$$f(A,B)=\{A+B+f(0,0)\}\cdot\{A+\overline{B}+f(0,1)\}\cdot\{\overline{A}+B+f(1,0)\}\cdot\{\overline{A}+\overline{B}+f(1,1)\}$$

A	*B*	*C*	*Z*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

論理関数の展開　（教p. 44 例題2. 14）

$$Z=\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}BC+AB\overline{C}+ABC$$

のとき、真理値表は左記のとおり。

加法標準形：$\boldsymbol{f}=\mathbf{1}$の時の最小項を対応させると

$$Z=f(0,0,1)\overline{A}\overline{B}C+f(0,1,1)\overline{A}BC+f(1,1,0)AB\overline{C}+f(1,1,1)ABC$$

乗法標準形：$\boldsymbol{f}=\mathbf{0}$の時の最小項を対応させると

$$Z=\{A+B+C+f(0,0,0)\}\{A+\overline{B}+C+f(0,1,0)\}$$
$$\{\overline{A}+B+C+f(1,0,0)\}\{\overline{A}+B+\overline{C}+f(1,0,1)\}$$

（4）排他的論理和とその標準形

XOR論理の真理値表

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$Z = A \oplus B = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$$
$$= (A + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$$

XNOR論理の真理値表

A	B	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$Z = \overline{A \oplus B} = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$
$$= (A + \overline{B}) \cdot (\overline{A} + B)$$

排他的論理和における公式

①交換則 $A \oplus B = B \oplus A$

②結合則 $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

③分配則 $A \cdot (B \oplus C) = A \cdot B \oplus A \cdot C$

④補元則 $A \oplus \overline{A} = 1$

⑤恒等則 $A \oplus 0 = A$

⑥その他 $A \oplus 1 = \overline{A}$

⑦その他 $A \oplus A = 0$

$$\underbrace{1 \oplus 1 \oplus 1}_{\text{奇数個}} = 1$$

$$\underbrace{1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1}_{\text{偶数個}} = 0$$

次式を証明せよ （教p. 46 例題2. 15）

（1） $1 \oplus A = \overline{1} \cdot A + 1 \cdot \overline{A} = 0 \cdot A + \overline{A} = \overline{A}$

（2） $\left(A \oplus B\right) \oplus A \cdot B = \left(\overline{A \oplus B}\right) \cdot \left(A \cdot B\right) + \left(A \oplus B\right) \cdot \left(\overline{A \cdot B}\right)$

$= \left(\overline{\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}}\right) \cdot \left(A \cdot B\right) + \left(\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}\right) \cdot \left(\overline{A \cdot B}\right)$

$= \left(A + \overline{B}\right) \cdot \left(\overline{A} + B\right) \cdot \left(A \cdot B\right) + \left(\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}\right) \cdot \left(\overline{A} + \overline{B}\right)$

$= \left(A \cdot \overline{A} + A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{B}\right) \cdot \left(A \cdot B\right) + \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$

$= A \cdot B + 0 + \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} = A \cdot B + \overline{A} \cdot B + A \cdot B + A \cdot \overline{B}$

$= A \cdot \left(B + \overline{B}\right) + B \cdot \left(A + \overline{A}\right) = A + B$

式の証明 （教p. 49 演習問題2. 6（1））

$A\left(B \oplus C\right) = AB \oplus CA$

左辺: $A\left(B \oplus C\right) = A\left(\overline{B}C + B\overline{C}\right) = A\overline{B}C + AB\overline{C}$

右辺: $AB \oplus CA = \overline{AB}CA + AB\overline{CA} = \left(\overline{A} + \overline{B}\right)CA + AB\left(\overline{C} + \overline{A}\right)$

$= A\overline{B}C + AB\overline{C}$

２変数の論理関数において，片方の論理変数A に着目し，加法標準形に展開すると，

$$
\begin{aligned}
f(A,B) &= A \cdot f(1,B) + \overline{A} \cdot f(0,B) && \boxed{\leftarrow \text{例題}2.15\ (2)} \\
&= A \cdot f(1,B) \oplus \overline{A} \cdot f(0,B) \oplus A \cdot \overline{A} \cdot f(1,B) \cdot f(0,B) \\
&= A \cdot f(1,B) \oplus \overline{A} \cdot f(0,B) && \boxed{\leftarrow \ A \oplus 1 = \overline{A}} \\
&= A \cdot f(1,B) \oplus (1 \oplus A) \cdot f(0,B) && \boxed{\leftarrow \text{分配則}} \\
&= A \cdot f(1,B) \oplus \{ f(0,B) \oplus A \cdot f(0,B) \} && \boxed{\leftarrow \text{交換則・結合則・分配則}} \\
&= f(0,B) \oplus A \cdot \{ f(0,B) + f(1,B) \} && \text{(2-1)}
\end{aligned}
$$

次に，$f(0,B)$および$f(1,B)$を論理変数B に着目し，展開する。

$f(A,B) = B \cdot f(A,1) + \overline{B} \cdot f(A,0)$ 　より，

$$
\begin{aligned}
f(\boxed{0,}B) &= B \cdot f(0,1) + \overline{B} \cdot f(0,0) \\
&= B \cdot f(0,1) \oplus \overline{B} \cdot f(0,0) \oplus B \cdot \overline{B} \cdot f(0,1) \cdot f(0,0) \\
&= B \cdot f(0,1) \oplus (1 \oplus B) \cdot f(0,0) \\
&= f(\boxed{0,}0) \oplus B \cdot \{ f(\boxed{0,}0) \oplus f(\boxed{0,}1) \} && \text{(2-2)}
\end{aligned}
$$

同様に　$f(\boxed{1,}B) = f(\boxed{1,}0) \oplus B \cdot \{ f(\boxed{1,}0) \oplus f(\boxed{1,}1) \}$　　(2-3)

(2-1)に(2-2)および(2-3)を代入すると,

$$
\begin{aligned}
f(A,B) &= f(0,0) \oplus B \cdot \{f(0,0) \oplus f(0,1)\} \\
&\quad \oplus A\left[f(0,0) \oplus B \cdot \{f(0,0) \oplus f(0,1)\} \oplus f(1,0) \oplus B \cdot \{f(1,0) \oplus f(1,1)\}\right] \\
&= \underline{f(0,0)} \oplus \underline{B \cdot \{f(0,0) \oplus f(0,1)\}} \oplus \underline{A \cdot f(0,0)} \oplus \underline{A \cdot B \cdot \{f(0,0) \oplus f(0,1)\}} \\
&\quad \oplus \underline{A \cdot f(1,0)} \oplus \underline{A \cdot B \cdot \{f(1,0) \oplus f(1,1)\}} \\
&= \underline{f(0,0)} \oplus \underline{A \cdot \{f(0,0) \oplus f(1,0)\}} \oplus \underline{B \cdot \{f(0,0) \oplus f(0,1)\}} \\
&\quad \oplus \underline{A \cdot B \cdot \{f(0,0) \oplus f(0,1) \oplus f(1,0) \oplus f(1,1)\}}
\end{aligned}
$$

・・・<u>排他的論理和標準形</u>

課題2.8　式の証明

$$(A \oplus B)(B \oplus C)(C \oplus A) = 0$$