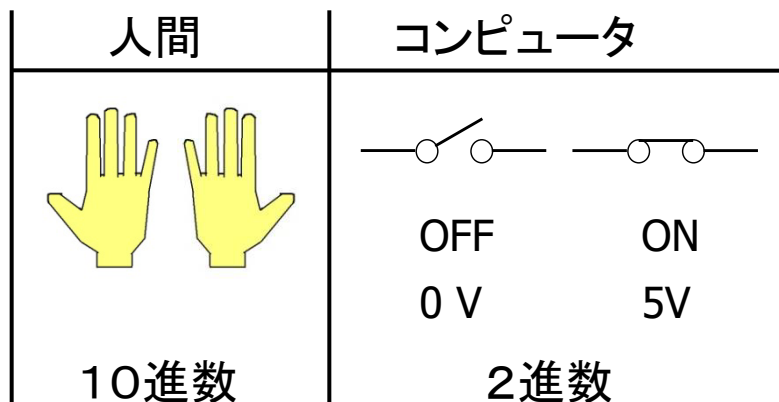


1. 数と符号の表現

1-1 位取り基数法



桁上がり →

2進数	8進数	10進数	16進数
0	0	0	0
1	1	1	1
10	2	2	2
11	3	3	3
100	4	4	4
101	5	5	5
110	6	6	6
111	7	7	7
1000	10	8	8
1001	11	9	9
1010	12	10	A
1011	13	11	B
1100	14	12	C
1101	15	13	D
1110	16	14	E
1111	17	15	F
10000	20	16	10

d_n : 数字 (digit, デイジット)

r : 基数 (radix, ラディックス)

r 進数

r^n : 重み (weight)

$$(N)_r = d_n \times r^n + d_{n-1} \times r^{n-1} + \dots + d_1 \times r^1 + d_0 \times r^0$$

整数部

$$+ d_{-1} \times r^{-1} + d_{-2} \times r^{-2} + \dots + d_{-n} \times r^{-n}$$

小数部

入れ子表現

$$= \left(\left(\left(\left(d_n \times r + d_{n-1} \right) \times r + d_{n-2} \right) \times r + \dots \right) \times r + d_1 \right) + d_0$$

整数部

$$+ \left(\left(\left(\left(\left(d_{-n} \times r^{-1} + d_{-(n-1)} \right) \times r^{-1} + d_{-(n-2)} \right) \times r^{-1} + \dots \right) \times r^{-1} + d_{-2} \right) + d_{-1} \right) \times r^{-1}$$

小数部

位取り基数法の例

$$\text{10進数} \quad (234.5)_{10} = 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{2進数} \quad (1011.1)_2 &= 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} \\ &= (11.5)_{10} \end{aligned}$$

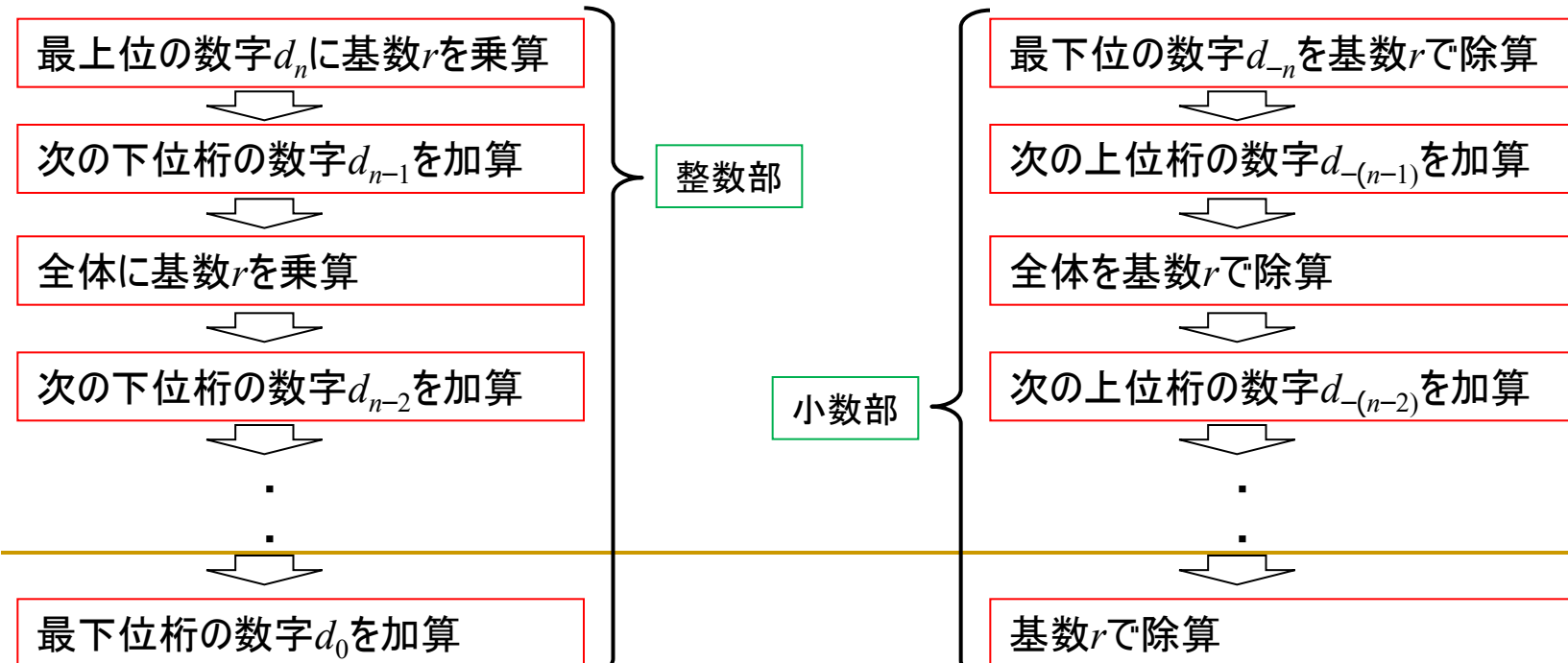
$$\begin{aligned} \text{8進数} \quad (345.6)_8 &= 3 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 5 \times 8^0 + 6 \times 8^{-1} \\ &= (229.75)_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{16進数} \quad (\text{A8D.C})_{16} &= \text{A} \times 16^2 + 8 \times 16^1 + 13 \times 16^0 + 12 \times 16^{-1} \\ &= (2701.75)_{10} \end{aligned}$$

1-2 基数変換 (1) r 進数 \rightarrow 10進数

$$(N)_r = d_n \times r^n + d_{n-1} \times r^{n-1} + \dots + d_1 \times r^1 + d_0 \times r^0 + d_{-1} \times r^{-1} + d_{-2} \times r^{-2} + \dots + d_{-n} \times r^{-n}$$

$$= \underbrace{\left(\left(\left(\left(d_n \times r + d_{n-1} \right) \times r + d_{n-2} \right) \times r + \dots \right) \times r + d_1 \right) \times r + d_0}_{\text{整数部}} + \underbrace{\left(\left(\left(\left(d_{-n} \times r^{-1} + d_{-(n-1)} \right) \times r^{-1} + d_{-(n-2)} \right) \times r^{-1} + \dots \right) \times r^{-1} + d_{-1} \right) \times r^{-1}}_{\text{小数部}}$$



r 進数 → 10進数 整数部変換の例

$$(2345)_{10} = 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

$$= ((2 \times 10 + 3) \times 10 + 4) \times 10 + 5$$

$$(2A3C)_{16} = 2 \times 16^3 + 10 \times 16^2 + 3 \times 16^1 + 12$$

$$= ((2 \times 16 + 10) \times 16 + 3) \times 16 + 12$$

$$= (10812)_{10}$$

$$(1101)_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1$$

$$= ((1 \times 2 + 1) \times 2 + 0) \times 2 + 1 = (13)_{10}$$

2進数は桁数が大きいので、一旦16進数あるいは8進数に変換した後で10進数に変換すると簡単

最上位の数字に基数を乗算



次の下位桁の数字を加算



基数を乗算

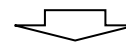


次の下位桁の数字を加算



.

.



最下位桁の数字を加算

2進数 ⇔ 8進数
3桁区切り

2進数 ⇔ 16進数
4桁区切り

$$(|1101|1010|0111|1100)_2$$

$$= (|D|A|7|C)_{16}$$

$$= ((13 \times 16 + 10) \times 16 + 7) \times 16 + 12$$

$$= (55932)_{10}$$

$$(|001|101|101|001|111|100)_2$$

$$= (|1|5|5|1|7|4)_8$$

$$= (((((1 \times 8 + 5) \times 8 + 5) \times 8 + 1) \times 8 + 7) \times 8 + 4)$$

$$= (55932)_{10}$$

基数変換 整数部 (r 進数 → 2, 8, 10, 16進数) (教p. 5 例題1.1)

r 進数 → 10進数 小数部変換の例

$$\begin{aligned}(0.654)_{10} &= 6 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-3} \\ &= \left((4 \times 10^{-1} + 5) \times 10^{-1} + 6 \right) \times 10^{-1} = 0.654\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(0.B3C)_{16} &= B \times 16^{-1} + 3 \times 16^{-2} + C \times 16^{-3} \\ &= \left((12 \times 16^{-1} + 3) \times 16^{-1} + 11 \right) \times 16^{-1} = 0.702148437\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(0.C8)_{16} &= 12 \times 16^{-1} + 8 \times 16^{-2} \\ &= \left(8 \times 16^{-1} + 12 \right) \times 16^{-1} = 0.78125\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(0.101)_2 &= 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} \\ &= \left((1 \times 2^{-1} + 0) \times 2^{-1} + 1 \right) \times 2^{-1} = 0.625\end{aligned}$$

基数変換 小数部 (r 進数 → 10進数) (教p. 6 例題1. 2)

最下位の数字を基数で除算



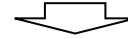
次の上位桁の数字を加算



基数で除算

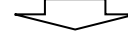


次の上位桁の数字を加算



.

.



基数で除算

2進数 → 16進数

$$(0.10111)_2 = (0.10111000)_2 = (0.B8)_{16}$$

2進数 → 8進数

$$(0.10111)_2 = (0.101110)_2 = (0.56)_8$$

16進数 → 2進数

$$(0.C6)_{16} = (0.11000110)_2$$

2進数 → 8進数

$$(0.11000110)_2 = (0.614)_8$$

基数変換 小数部 (r 進数 → 2, 8, 16進数) (教p. 7 例題1.3)

(2) 10進数 → r 進数

$$(N)_r = d_n \times r^n + d_{n-1} \times r^{n-1} + \dots + d_1 \times r^1 + d_0 \times r^0 + d_{-1} \times r^{-1} + d_{-2} \times r^{-2} + \dots + d_{-n} \times r^{-n}$$

整数部

整数部

$$= \left(\left(\left(\left(d_n \times r + d_{n-1} \right) \times r + d_{n-2} \right) \times r + \dots \right) \times r + d_1 \right) \times r + d_0$$

小数部

$$+ r^{-1} \times \left(d_{-1} + r^{-1} \times \left(\dots + r^{-1} \times \left(d_{-(n-2)} + r^{-1} \times \left(d_{-(n-1)} + r^{-1} \times d_{-n} \right) \right) \right) \right)$$

整数部を基数 r で除算 → 余り d_0



商を基数 r で除算 → 余り d_1



⋮



商を基数 r で除算 → 余り d_{n-2}



商を基数 r で除算 → 余り d_{n-1}



商を基数 r で除算 → 余り d_n

整数部

小数部

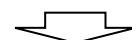
小数部に基数 r を乗算 → 整数部 d_{-1}



残りの少数部に基数 r を乗算 → d_{-2}



⋮



残りの少数部に基数 r を乗算 → $d_{-(n-2)}$



残りの少数部に基数 r を乗算 → $d_{-(n-1)}$



残りの少数部に基数 r を乗算 → d_{-n} ¹⁰

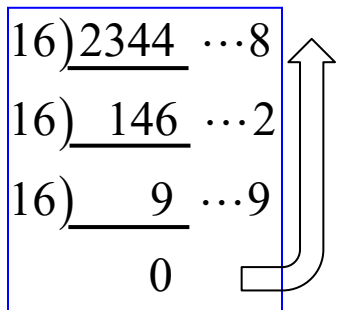
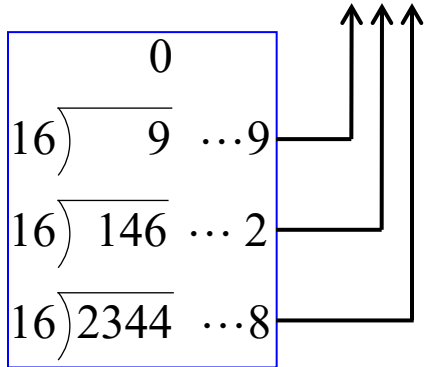
10進数 → r進数

整数部変換の例

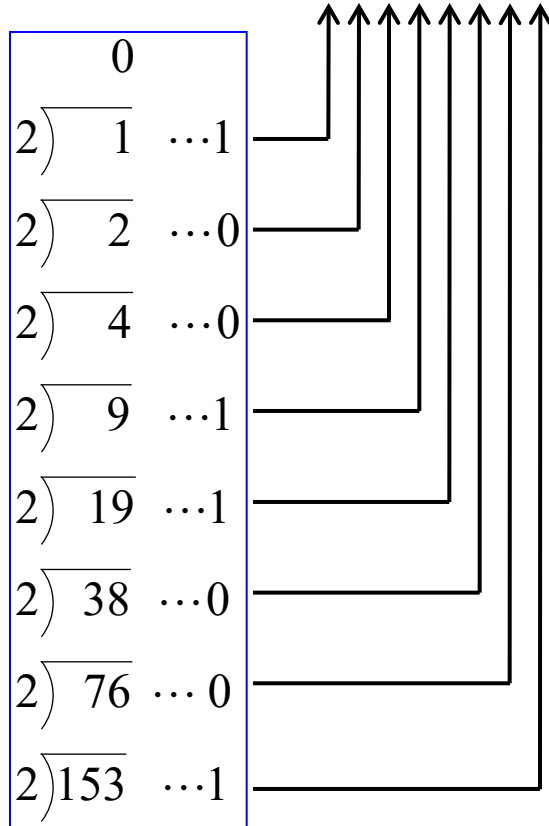
$$(2344)_{10} = (928)_{16}$$

$$(153)_{10} = (10011001)_2$$

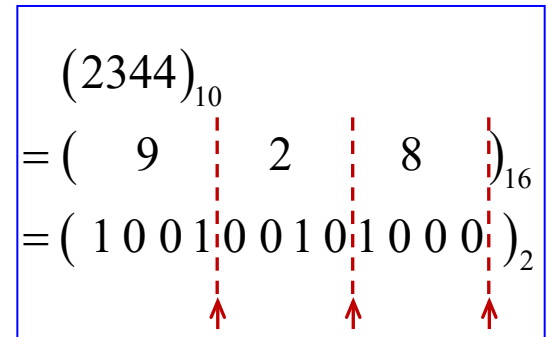
$$(2344)_{10} = (928)_{16}$$



10進数 → 16進数



10進数 → 2進数

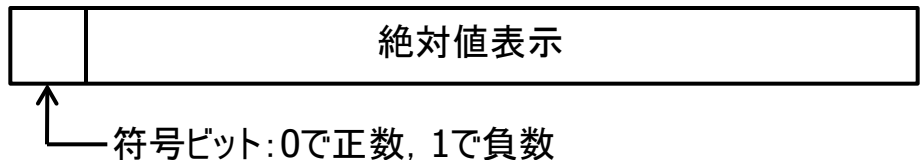


10進数基数変換 整数部 (10進数 → 16進数) (教p. 8 例題1.4, 例題1.5)

1-3 負の数の表現方法

(1) 絶対値表現

符号部と数値部を別々に表示



$$\begin{aligned} (+3)_{10} &= (0011)_2 \\ (-3)_{10} &= (1011)_2 \end{aligned}$$

(2) 補数表現

r を基数とする数値 a と b に対し、 $a + b = r$ が成り立つ時、 a と b を互いに r の補数と呼ぶ
この時 b は、 a の負数表現である

ある数の補数は、同じ桁数を持つ最大の数からその数を引き、1を加算することによって得られる。

$$\begin{array}{r} 999 \leftarrow \text{10進数3桁の最大の数} \\ -) 438 \\ \hline 561 \\ +) 1 \leftarrow \text{1を加算} \\ \hline \text{562} \end{array}$$

$(438)_{10}$ の補数

$$\begin{array}{r} 11111111 \leftarrow \text{2進数8桁の最大の数} \\ -) 01011101 \\ \hline 10100010 \\ +) 1 \leftarrow \text{1を加算} \\ \hline \text{10100011} \end{array}$$

$(01011101)_2$ の補数

$$\begin{array}{r} FFF \leftarrow \text{16進数3桁の最大の数} \\ -) 1C8 \\ \hline E37 \\ +) 1 \leftarrow \text{1を加算} \\ \hline \text{E38} \end{array}$$

$(1C8)_{16}$ の補数

補数 (教p. 11 例題1.7)

(3) ゲタばき表現

- 2の補数表現されている数値の最小値の絶対値をすべての数に加える表現であり、すべての数値が非負かつ最小値が0
- 計算には不向きだが、数の大小判別は容易
- 浮動小数点の指数部、AD変換の出力などに使用

2進数における数値の各種表現方法

10進表示	非負整数表現	符号付き絶対値表現	2の補数表現	ゲタばき表現
15	1 1 1 1			
14	1 1 1 0			
13	1 1 0 1			
12	1 1 0 0			
11	1 0 1 1			
10	1 0 1 0			
9	1 0 0 1			
8	1 0 0 0			
7	0 1 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1	1 1 1 1
6	0 1 1 0	0 1 1 0	0 1 1 0	1 1 1 0
5	0 1 0 1	0 1 0 1	0 1 0 1	1 1 0 1
4	0 1 0 0	0 1 0 0	0 1 0 0	1 1 0 0
3	0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1	1 0 1 1
2	0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 0	1 0 1 0
1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1	1 0 0 1
0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	1 0 0 0
-1		1 0 0 1	1 1 1 1	0 1 1 1
-2		1 0 1 0	1 1 1 0	0 1 1 0
-3		1 0 1 1	1 1 0 1	0 1 0 1
-4		1 1 0 0	1 1 0 0	0 1 0 0
-5		1 1 0 1	1 0 1 1	0 0 1 1
-6		1 1 1 0	1 0 1 0	0 0 1 0
-7		1 1 1 1	1 0 0 1	0 0 0 1
-8			1 0 0 0	0 0 0 0

2の補数表現に、 $(8)_{10} = (1000)_2$ を加える

オフセットバイナリ

ストレートバイナリ

コンプリメントバイナリ

1-4 加減算と補数加算

$$\begin{array}{r} 0101 \cdots 5 \\ +) 0010 \cdots 2 \\ \hline 0111 \end{array}$$

符号付き2進数の加算

$$\begin{array}{r} 0101 \cdots 5 \\ -) 0010 \cdots 2 \\ \hline 0011 \end{array}$$

↑ 借り

符号付き2進数の減算

$$\begin{array}{r} 0101 \cdots 5 \\ +) 1110 \cdots -2 \\ \hline 10011 \end{array} \leftarrow \begin{array}{r} 1101 \text{ ビット反転} \\ +) 1 \\ \hline 1110 = -2 \end{array}$$

符号付き2進数の補数加算

1-5 浮動小数点表現

(1) 10進数の表し方

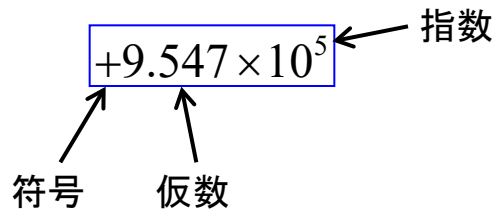
固定小数点表現

- ・小数点の位置は固定
- ・小数点の位置を右端に置くことに決めれば、固定小数点表現で与えられる数値は正負の整数となる

符号	数値
----	----

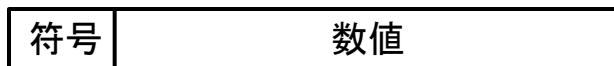
浮動小数点表現

- ・値の幅の広い実数を表現
- ・指数を用いる表現

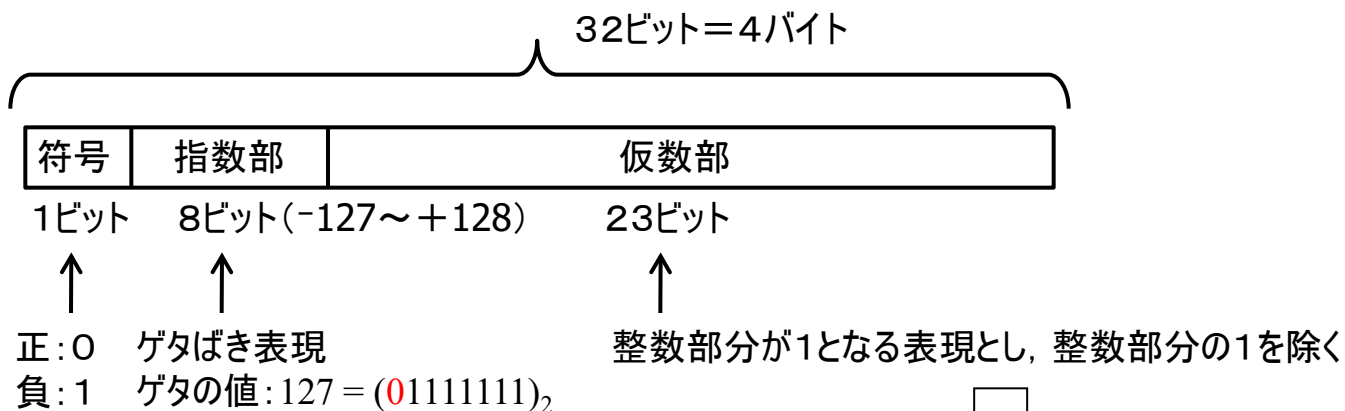


(2) 2進数の固定小数点表現

- ・2進整数でデータを表現
- ・負数は、2の補数表示
- ・Nバイトであれば、 $-2^{N-1} \sim 2^{N-1}-1$ の数値が表現可能



(3) 2進数の浮動小数点表現 (IEEE754規格)



指数 2のとき	$\rightarrow (10)_2 + (01111111)_2 = (10000001)_2$
指数 -2のとき	$\rightarrow (-10)_2 + (01111111)_2 = (01111101)_2$

$(11.01)_2 \times 2^{-2} = (1.101)_2 \times 2^{-1}$

↓

$(101000000000000000000000)_2$

1-6 符号体系

1-6-1 数字の表現

数字, 文字の入出力 $\begin{matrix} \xrightarrow{\text{符号化}} \\ \xleftarrow{\text{復号化}} \end{matrix}$ 「0」と「1」の符号に変換

10進数1桁を表す各種符号

10進数	BCD符号	3余り符号	グレイ符号	2421符号	2 out of 5 符号
0	0 0 0 0	0 0 1 1	0 0 0 0	0 0 0 0	1 1 0 0 0
1	0 0 0 1	0 1 0 0	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1 1
2	0 0 1 0	0 1 0 1	0 0 1 1	0 0 1 0	0 0 1 0 1
3	0 0 1 1	0 1 1 0	0 0 1 0	0 0 1 1	0 0 1 1 0
4	0 1 0 0	0 1 1 1	0 1 1 0	0 1 0 0	0 1 0 0 1
5	0 1 0 1	1 0 0 0	0 1 1 1	1 0 1 1	0 1 0 1 0
6	0 1 1 0	1 0 0 1	0 1 0 1	1 1 0 0	0 1 1 0 0
7	0 1 1 1	1 0 1 0	0 1 0 0	1 1 0 1	1 0 0 0 1
8	1 0 0 0	1 0 1 1	1 1 0 0	1 1 1 0	1 0 0 1 0
9	1 0 0 1	1 1 0 0	1 1 0 1	1 1 1 1	1 0 1 0 0

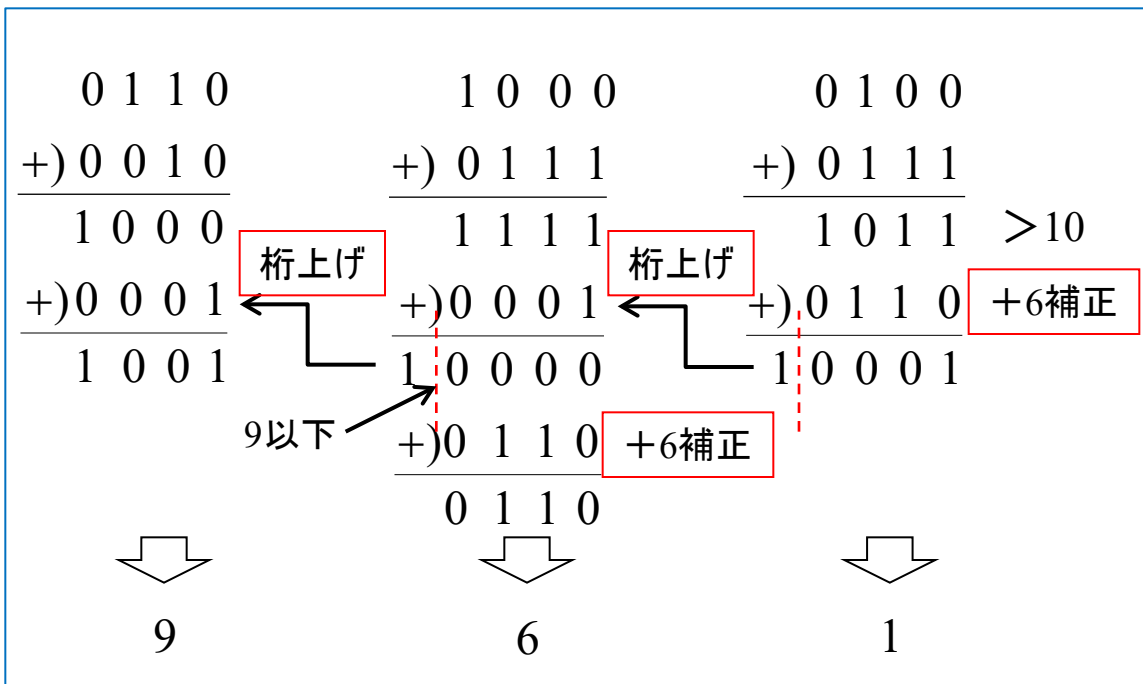
(1) BCD符号 (Binary Coded Decimal code, 2進10進符号)

10進数	BCD符号
0	0 0 0 0
1	0 0 0 1
2	0 0 1 0
3	0 0 1 1
4	0 1 0 0
5	0 1 0 1
6	0 1 1 0
7	0 1 1 1
8	1 0 0 0
9	1 0 0 1
10	1 0 1 0
11	1 0 1 1
12	1 1 0 0
13	1 1 0 1
14	1 1 1 0
15	1 1 1 1

冗長符号:
使用しない

各桁の重み: $2^3 \ 2^2 \ 2^1 \ 2^0$
= 8 4 2 1

$$\begin{array}{r} 684 \\ +) 277 \\ \hline 961 \end{array}$$



(2) 3余り符号 (Excess 3 code, 3増し符号)

BCD符号を+3した符号

- ・符号に「1」が必ず1つ以上含まれる
- ・すべてのビットが同時に0になることがないので、断線などによる信号途絶の検出に利用できる
- ・0と1を反転させると9の補数となる (自己補数)

足し合わせるとすべて「9」

10進数	3余り符号	0と1を反転	対応する10進数
0	0 0 1 1	1 1 0 0	9
1	0 1 0 0	1 0 1 1	8
2	0 1 0 1	1 0 1 0	7
3	0 1 1 0	1 0 0 1	6
4	0 1 1 1	1 0 0 0	5
5	1 0 0 0	0 1 1 1	4
6	1 0 0 1	0 1 1 0	3
7	1 0 1 0	0 1 0 1	2
8	1 0 1 1	0 1 0 0	1
9	1 1 0 0	0 0 1 1	0

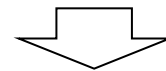
(3) グレイ符号 (Gray code, 交番2進符号)

10進数	グレイ符号
0	0 0 0 0
1	0 0 0 1
2	0 0 1 1
3	0 0 1 0
4	0 1 1 0
5	0 1 1 1
6	0 1 0 1
7	0 1 0 0
8	1 1 0 0
9	1 1 0 1
10	1 1 1 1
11	1 1 1 0
12	1 0 1 0
13	1 0 1 1
14	1 0 0 1
15	1 0 0 0

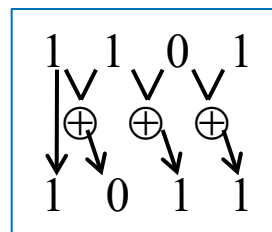
上下交番

非重み付き符号

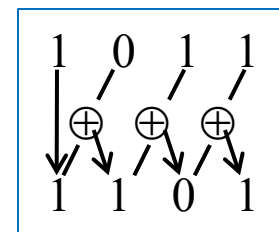
- ・隣接する2つの符号が互いに1ビットだけ異なる
- ・7と8を境に上下対称
- ・2進数の最上位ビットはそのままにし、それ以降のビットについて排他的論理和を取ることで変換可能



2進数
↓
グレイ符号



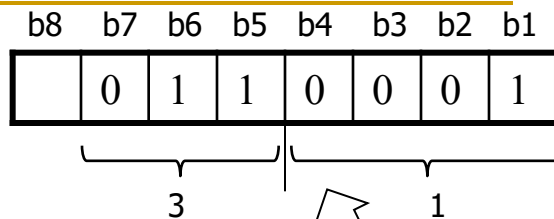
グレイ符号
↓
2進数



排他的論理和 (不一致回路)

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

1-6-2 文字の表現



ASCIIコード表

							b7	0	0	0	0	1	1	1	1
							b6	0	0	1	1	0	0	1	1
							b5	0	1	0	1	0	1	0	1
b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1		0	1	2	3	4	5	6	7
			0	0	0	0	0 (0)	NUL	DLE	SP	0	@	P	'	p
			0	0	0	1	1 (1)	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
			0	0	1	0	2 (2)	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
			0	0	1	1	3 (3)	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
			0	1	0	0	4 (4)	EOT	DC4	\$	4	D	T	d	t
			0	1	0	1	5 (5)	ENQ	NAC	%	5	E	U	e	u
			0	1	1	0	6 (6)	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
			0	1	1	1	7 (7)	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
			1	0	0	0	8 (8)	BS	CAN	(8	H	X	h	x
			1	0	0	1	9 (9)	HT	EM)	9	I	Y	i	y
			1	0	1	0	10 (A)	LF/NL	SUB	*	:	J	Z	j	z
			1	0	1	1	11 (B)	VT	ESC	+	;	K	[k	{
			1	1	0	0	12 (C)	FF	FS	,	<	L	\	l	
			1	1	0	1	13 (D)	CR	GS	-	=	M]	m	}
			1	1	1	0	14 (E)	SO	RS	.	>	N	^	n	~
			1	1	1	1	15 (F)	SI	US	/	?	O	_	o	DEL

文字「1」は「31」
 文字「2」は「32」
 文字「9」は「39」

文字「A」は「41」
 文字「B」は「42」
 文字「C」は「43」

↑()は16進数。 *JISでは、\は¥、~は-

1-7 符号の誤り検出

(1) パリティチェック(奇偶検査)

データを符号として伝送する際1符号中の「1」の個数をカウントし、この数が奇数あるいは偶数になるようさらに1ビット加えた符号を伝送する

奇数パリティの例

伝送したい英数字	1	9	8	3	A	B	C	Z	水平パリティビット
垂直パリティビット	0	1	0	1	1	1	0	1	0
英字ビット	0	0	0	0	1	1	1	1	1
数字ビット	1	1	1	1	0	0	0	0	1
数字ビット	1	1	1	1	0	0	0	1	0
	0	1	1	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	1	0	1	1	1	1
	1	1	0	1	1	0	1	0	0
ASCIIコードを10進数に変換したデータ	49	185	56	179	193	194	67	218	

(2) チェックサム方式

1 符号をただの2進数と見なし, すべて加算し, 総和の下位8ビットを抽出
→ 2の補数を取り, **チェックサムコード**としてブロックデータの最後に付加して伝送

$$\begin{aligned} &49 + 185 + 56 + 179 + 193 + 194 + 67 + 218 = (1141)_{10} \\ &= (000001000\underbrace{11110101})_2 \\ &\quad \quad \quad \swarrow \text{下位8ビットの2の補数} \\ &\quad \quad \quad (10001011)_2 \\ &\quad \quad \quad \text{8ビット**チェックサムコード**} \end{aligned}$$

受信したデータの総和を取り, 下位8ビットを**チェックサムコード**と加算
→ 0になればエラーなしと判断

チェックサム方式 (教p. 19)