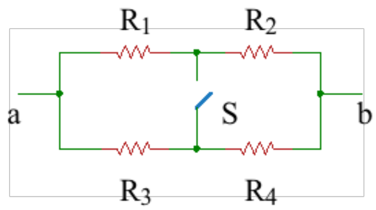
問題 2



図問 2

　図問 2 のように 4 個の抵抗 R_1，R_2，R_3，および R_4 を接続し，ab 間の電圧を 200V に一定にしておき，スイッチ S を開閉しても全電流が常に一定である場合には，R_3，R_4 はそれぞれ何 Ω か．ただし，全電流 $= 25$A，$R_1 = 16\Omega$，$R_2 = 8\Omega$ とする．

解答

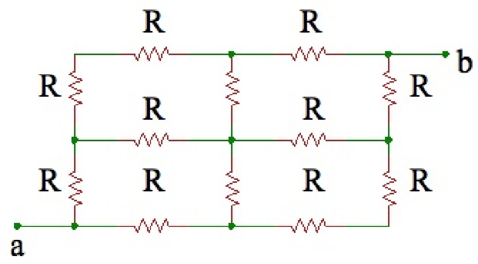
スイッチ S を開いたときの ab 間の全抵抗は

$$R_f = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{24\,(R_3 + R_4)}{24 + R_3 + R_4} = \frac{200}{25} = 8\ \Omega$$

よって $R_3 + R_4 = 12\Omega$ である．
一方スイッチ S を閉じても全電流が一定であるためにはブリッジが平衡でなければならない．
平衡条件より $R_1 R_4 = R_2 R_3$ すなわち $R_3 = 2R_4$ である．したがって

$$R_3 = 12 \times \frac{2}{3} = 8\ \Omega$$
$$R_4 = 12 \times \frac{1}{4} = 4\ \Omega$$

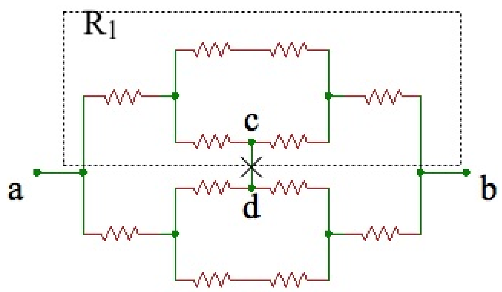
問題 3



図問 3

図問 3 の回路で，端子対 ab から見た等価抵抗を求めよ．

解答



図解 3-1

図解 3-1 のように回路を書き換える．回路の対称性から，cd 間に電位差がないため，cd 間には電流は流れない．したがって，cd 間は解放して考えてもよい．回路の上半分の合成抵抗 R_1 は

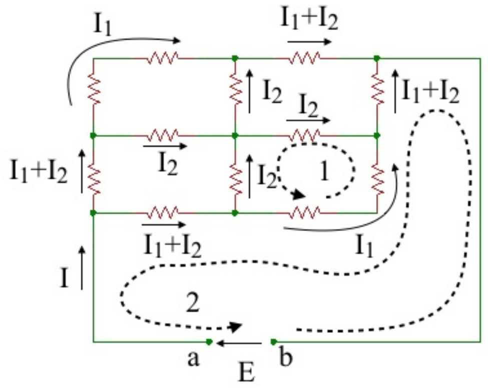
$$R_1 = R + \left(\frac{1}{1/2R + 1/2R} \right) + R = 3R$$

よって，合成抵抗 R_0 は

$$R_0 = \frac{1}{1/3R + 1/3R} = 1.5R$$

となる．

(別解)



図解 3-2

すべての回路の抵抗値が等しいという回路の対称性を利用して，図解問 3-2 に示すような 2 つの電流変数 I_1，I_2 を導入する．$(I = 2(I_1 + I_2))$
まず，図解 3 の右下の閉路 1 における電圧平衡の法則から

$$\begin{aligned} RI_2 + RI_2 - (RI_1 + RI_1) = 0 \\ I_1 = I_2 \end{aligned}$$

となる．したがって閉路 2 における電圧平衡の法則から

$$E = R(I_1 + I_2) + 2RI_1 + R(I_1 + I_2) = 6RI_1$$

となり，端子対 ab の合成抵抗 R_0 は

$$R_0 = \frac{E}{I} = \frac{6RI_1}{4I_1} = 1.5R$$

となる．

問題 5

100V 用の直流電圧計がある．その抵抗は何 Ω の直流抵抗を要するか．

解答

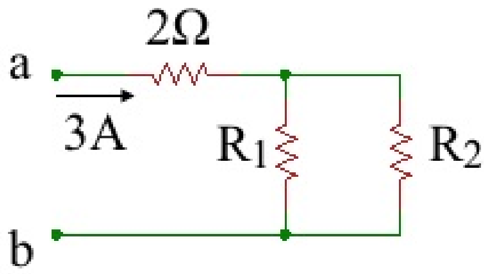
この電圧計を流れる最大電流は

$$I = \frac{100}{20 \times 10^3} = 5 \times 10^{-3}\ \text{A}.$$

RΩ の直流抵抗を挿入し，最大電流 I を直流電圧計に流した時の電圧降下が 600V になればよい．

$$\begin{aligned} \left(20 \times 10^3 + R\right) \times \left(5 \times 10^{-3}\right) = 600\ \text{V} \\ \therefore R = 100 \times 10^3 \Omega = 100\ \text{k}\Omega \end{aligned}$$

問題 9



図問 9

図問 9 に示すような回路において，端子対 ab に 24V の電圧を加え，3A の電流を流し，かつ R_1，R_2 に流れる電流を 2 対 3 になるようにするには R_1，R_2 をそれぞれ何 Ω にすればよいか．

解答

端子対 ab の全抵抗は

$$R = 2 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{24}{3} = 8\ \Omega$$

したがって

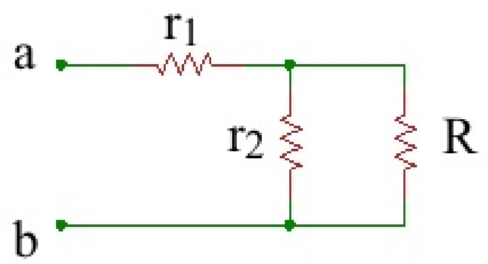
$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 6\ \Omega$$

R_1，R_2 に流れる電流は 2 対 3 であるから，抵抗値の比は 3 対 2 となり，$2R_1 = 3R_2$ である．
したがって

$$R_1 = 15\ \Omega,\ R_2 = 10\ \Omega$$

である．

問題 10



図問 10

図問 10 のような回路において，端子対 ab の合成抵抗を R とし，終端の抵抗 R に流れる電流を全電流の $1/\alpha$ にするには，r_1，r_2 の値はいくらとなるか．

解答

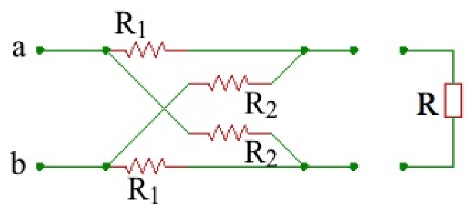
r_1，r_2 に流れる電流は抵抗値に反比例する．全電流を I とすると，

$$r_2 : (R + r_2) = \frac{1}{\alpha} I : I$$
$$\frac{r_2}{R + r_2} = \frac{1}{\alpha}, \ \therefore r_2 = \frac{R}{\alpha - 1}$$

端子対 ab の合成抵抗が R であるから，

$$R = r_1 + \frac{r_2 R}{R + r_2}$$
$$r_1 = R - \frac{r_2 R}{R + r_2} = R - \frac{R}{\alpha} = R\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$$

問題 13

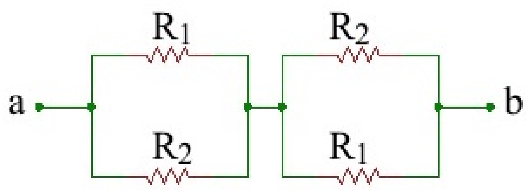


図問 3

図問 13 のような回路において,
(a) 端子対 cd を短絡したとき，端子対 ab から見た合成抵抗 R_s を求めよ.
(b) 端子対 cd を解放したとき，端子対 ab から見た合成抵抗 R_f を求めよ.
(c) 端子対 cd に抵抗 $R = \sqrt{R_f R_s}$ を接続したとき，端子対 ab から見た合成抵抗 R_0 を求めよ.

解答

(a)



図解 13-1

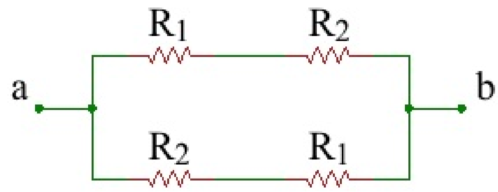
図解 13-1 より，R_1 と R_2 の並列回路が 2 個直列に接続されるので

$$R_s = \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

(b)

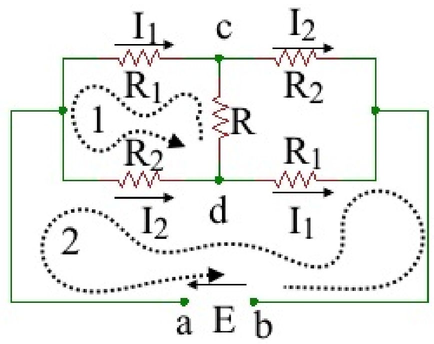
図解 13-2 より，R_1 と R_2 の直列回路が 2 個並列に接続されるので

$$R_f = \frac{R_1 + R_2}{2}$$



図解 13-2

(c)



図問 13-3

(a)，(b) より端子対 cd に接続される抵抗の値は

$$R = \sqrt{R_f R_s} = \sqrt{R_1 R_2}$$

回路の対称性を利用して，端子対 ab に電圧電源 E を加えたときに抵抗 R_1，R_2 に流れる電流を図解 13-3 のように定める．閉路 1 に対してキルヒホッフの電圧則より

$$RI_1 + R_2(I_1 - I_2) - R_2 I_2 = 0$$

したがって

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R + R_2}{R + R_1} \tag{1}$$

となる．また，閉路 2 に対してキルヒホッフの電圧則より，

$$R_2 I_2 + R_1 I_1 = E$$

となる．全電流を I とすると端子対 ab から見た合成抵抗 R_0 は，

$$R_0 = \frac{E}{I} = \frac{R_2 I_2 + R_1 I_1}{I_1 + I_2} = \frac{R_2 + R_1 \frac{I_1}{I_2}}{\frac{I_1}{I_2} + 1} \tag{2}$$

となる．(1)，(2) 式より

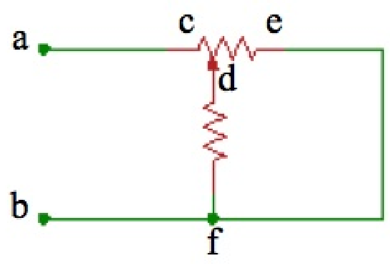
$$R_0 = \frac{R_2 + R_1\frac{R+R_2}{R+R_1}}{\frac{R+R_2}{R+R_1}+1} = \frac{R_2(R+R_1)+R_1(R+R_2)}{R+R_2+R+R_1} = \frac{(R_1+R_2)R+2R_1R_2}{R_1+R_2+2R}$$

ここで，$R=\sqrt{R_1R_2}$ であるので

$$R_0 = \frac{(R_1+R_2)R+2R^2}{R_1+R_2+2R} = \frac{(R_1+R_2+2R)R}{R_1+R_2+2R} = R$$

となる．

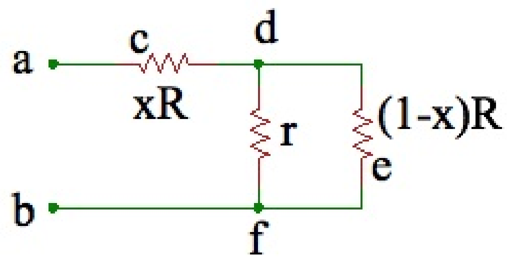
問題 14



図問 14

図問 14 のように ce および df 間に 2 個の一定抵抗を接続し，端子対 ab に一定電圧を加えるとき，de に流れる電流を最小にするためには，cd と de 間の抵抗の比をいかに定めたらよいか．

解答



図解 14

ce 間の抵抗を R，df 間の抵抗を r とし，パラメータ $x(0 \leq x \leq 1)$ を用いて，cd 間の抵抗を xR，de 間の抵抗を $(1-x)R$ で表すと端子対 ab の合成抵抗は

$$R_0 = xR + \frac{r(1-x)R}{r+(1-x)R} = \frac{R\{r+x\,(1-x)\,R\}}{r+(1-x)R}$$

となる．端子対 ab に加えた一定電圧を V とおけば，全電流は $I = V/R_0$ であるので，抵抗 r と $(1-x)R$ の並列回路における電圧降下は

$$
\begin{aligned}
V_1 &= I \times \frac{r(1-x)R}{r+(1-x)R} = \frac{V}{R_0} \times \frac{r(1-x)R}{r+(1-x)R} = \frac{V}{\frac{R\{r+x(1-x)R\}}{r+(1-x)R}} \times \frac{r(1-x)R}{r+(1-x)R} \\
&= \frac{r(1-x)R}{R\{r+x\,(1-x)\,R\}} V
\end{aligned}
$$

となる．したがって de に流れる電流は

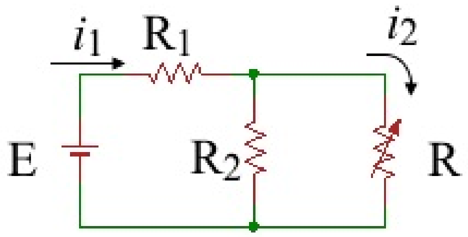
$$
i = \frac{V_1}{(1-x)R} = \frac{Vr}{R\{r+x\,(1-x)\,R\}}
$$

となるから i を最小にするにはこの式の分母を最大にすればよい．よって分母を x で微分した結果を 0 とおけば

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left[R\{x\,(1-x)\,R+r\}\right] &= 0 \\
1-2x &= 0 \\
x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

となる．よって cd と de 間の抵抗の比が $1:1$ であるときに de に流れる電流 i を最小にする．

問題 17



図解 17

図問 17 に示す回路において電圧電源 E および抵抗 R_1，R_2 の値は固定とし，負荷抵抗 R が消費する電力の最大値およびそのときの R の値を求めよ

解答

負荷抵抗 R に流れる電流を i，R_1 に流れる電流を i_1 とする．全抵抗 R_0 は

$$R_0 = R_1 + \frac{RR_2}{R+R_2} = \frac{R_1(R+R_2)+RR_2}{R+R_2}$$

である．また R と R_2 の並列回路における電圧降下は

$$E_1 = i_1 \times \frac{RR_2}{R+R_2} = \frac{E}{R_0} \times \frac{RR_2}{R+R_2} = \frac{RR_2}{R_1(R+R_2)+RR_2}E$$

である．したがって R に流れる電流 i_2 は

$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{E_1}{R} = \frac{R_2}{R_1(R+R_2)+RR_2}E = \frac{R_2}{R(R_1+R_2)+R_1R_2}E \\ &= \frac{\frac{R_2}{R_1+R_2}}{R+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}} \end{aligned}$$

ここで $\lambda = R_2/(R_1+R_2)$，$r = R_1R_2/(R_1+R_2)$ とおけば,

$$i_2 = \frac{\lambda E}{R+r}$$

負荷抵抗 R が消費する電力は

$$P = Ri_2^2 = \frac{R\lambda^2E^2}{(R+r)^2}$$

P が最大値を取るためには,

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{(R+r)^2 - 2R(R+r)}{(R+r)^4} = \frac{r-R}{(R+r)^3} = 0$$

よって $R = r = R_1 R_2/(R_1 + R_2)$ のとき最大電力

$$P_{max} = \frac{\lambda^2 E^2}{4r} = \frac{R_2 E^2}{4R_1(R_1 + R_2)}$$

となる.